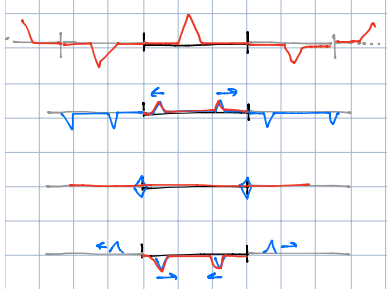
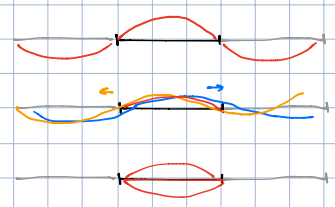
Ex Vågekv + sträng + 2 fasta ändar



Vi speglar här i det oändliga. Animation beskriver förloppet

Ex Stående våg i gitarrsträng.
Detta går enkelt att lösa med seriekutvecklingar också.



PDE: $u''_{tt} - c^2 u''_{xx} = 0$

RV: $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$

BV: $u(x,0) = \sin x \quad u'_t(x,0) = 0$

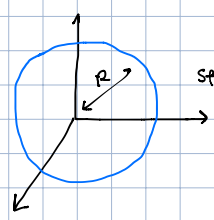
$$\frac{1}{2}\sin(x-ct) + \frac{1}{2}\sin(x+ct) = \frac{1}{2}\cdot 2\sin\left(\frac{x-ct+x+ct}{2}\right)\cos\frac{x+ct-x+ct}{2} = \boxed{\sin(x)\cos(ct)}$$

Ex Klotformig ballong: En upblåst ballong spricker. Ett klotformigt område med högre lufttryck kommer då att utjämnas.

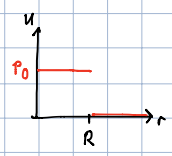
$\partial_t^2 u - c^2 \Delta u = 0$

$\downarrow$ sfäriska koordinater

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \frac{1}{r}\partial_r^2(ru) = 0 & r>0,\ t>0 \\ u(r,0) = 0,\ r>R \text{ och } p_0,\ r<R \\ u'_t(r,0) = 0 \\ u \text{ begränsad nära } 0! \end{cases}$$

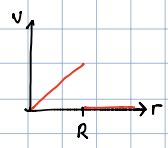


Sfärisk symmetri $\Rightarrow$ bara på radie!



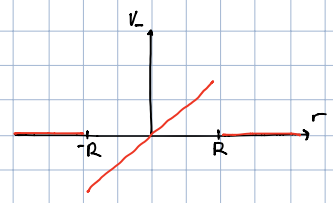
Ett räknetrick i detta fall: Introducera $r\cdot u(r,t) = v(r,t)$:

$$\begin{cases} \partial_t^2 v - c^2\partial_r^2 v = 0 & r>0,\ t>0 \\ v(r,t) = r\cdot p_0,\ r<R \text{ och } 0\ r>R \\ v'(r,0) = 0 \\ v(0,t) = 0 \end{cases}$$



Nu utvidgar vi problemet genom udda spegling till hela r: v_-

$$\begin{cases} \partial_t^2 v_- - c^2\partial_r^2 v_- = 0 & r\in\mathbb{R},\ t>0 \\ v_-(r,0) = \{rp_0,\ |r|<R \text{ och } 0,\ |r|>R\} = g(r) \\ \partial_t v_-(r,0) = 0 = h(r) \end{cases}$$



d'Alembert ger nu: $v_-(r,t) = \frac{1}{2}g(r-ct) + \frac{1}{2}g(r+ct) \Rightarrow \boxed{u(r,t) = \frac{1}{2r}(g(r-ct) + g(r+ct))}$

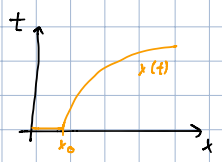
Denna lösning är obegränsad i $r=0$, så modellen är inte bra! Restriktionen är för $r>0$.

Karakteristikor (OBS överkurs)

Detta är dklart och behöver inte kunna!

Vi betraktar nu en första ordningens PDE för att lösa på ett lite annat sätt.

$$\begin{cases} \partial_t u + 2t\partial_x u = 0 \\ u(x,0) = x^2 \end{cases}$$



Metod 1: $s(t) = u(x(t), t)$

$$s'(t) = u'_x \underbrace{x'}_{=2t} + u'_t = u'_t + 2t\,u'_x = 0 \text{ , om } x' = 2t. \longrightarrow x(t) = t^2 + x_0$$

$$s(t) = s(0) = u(x(0), 0) = u(x_0, 0) = x_0^2 \implies u(x,t) = (x - t^2)^2$$

konstant

Ex $2\partial_x^2 u - \partial_x\partial_y u - \partial_y^2 u = 0$. Sök variabelbyte $\alpha = \alpha(x,y)$, $\beta = \beta(x,y)$

Metod: översätt

$$\left.\begin{aligned} \partial_x^2 u &= (dy)^2 \\ \partial_x\partial_y u &= -dx\,dy \\ \partial_y^2 u &= (dx)^2 \end{aligned}\right\} 2(dy)^2 + dx\,dy - (dx)^2 = 0 \iff (2dy - dx)(dy + dx) = 0 \iff d(\underbrace{2y - x}_{\alpha})\, d(\underbrace{y + x}_{\beta}) = dx\,dy$$