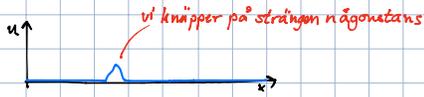


Kapitel 7: Vågutbredning. "Jag har sparat det läckaste till sist"

Enklast: Vågrotationen i en rumsdimension utan kanter, exempelvis en oändlig sträng:

Våglvationen blir: $u_{tt}'' - c^2 u_{xx}'' = 0$

Man gör variabelbytet $\begin{cases} \alpha = x+ct \\ \beta = x-ct \end{cases}$



Våglvationen blir då: $u_{\alpha\beta}'' = 0$, vilket efter integration blir: $u_{\alpha\beta}' = \phi'(\beta) \Rightarrow u(\alpha, \beta) = \phi(\beta) + \psi(\alpha)$
 $\Rightarrow u(x, t) = \phi(x-ct) + \psi(x+ct)$

Tolkning? *högerväg* *vänsterväg*

För att få entydig lösning krävs två begynnelsevärden. Vi saknar begynnelsevillkor.

PDE: $u_{tt}'' - c^2 u_{xx}'' = 0$

BV₁: $u(x, 0) = g(x)$

BV₂: $u_t(x, 0) = h(x)$

Vi vet att lösningen har formen $u(x, t) = \phi(x-ct) + \psi(x+ct) \rightarrow u_t(x, t) = -c\phi'(x-ct) + c\psi'(x+ct)$

BV ger $\begin{cases} u(x, 0) = \phi(x) + \psi(x) = g(x) \\ u_t(x, 0) = -c\phi'(x) + c\psi'(x) = h(x) \end{cases}$, vilket medför: $-\phi(x) + \psi(x) = \frac{1}{c} \int_0^x h(y) dy$

$\Rightarrow \phi(x) = \frac{1}{2} (g(x) - \frac{1}{c} \int_0^x h(y) dy)$, $\psi(x) = \frac{1}{2} (g(x) + \frac{1}{c} \int_0^x h(y) dy)$

$u(x, t) = \phi(x-ct) + \psi(x+ct) \Rightarrow u(x, t) = \frac{1}{2} (g(x-ct) + g(x+ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} h(y) dy$

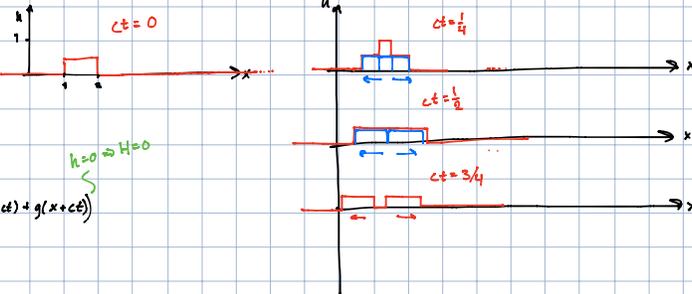
Känner vi g och h kan vi direkt skriva upp lösningen på denna form! Den fungerar dock bara på "oändliga" strängar utan kanter $x \in \mathbb{R}, t \geq 0$

Integraldelen i d'Alemberts formel kan även skrivas $\frac{1}{2c} (H(x+ct) - H(x-ct))$, där H är primitiv till h

Ex) $\begin{cases} u_{tt}'' - c^2 u_{xx}'' = 0 \\ u(x, 0) = g(x) = \theta(x-1) - \theta(x-2) \\ u_t(x, 0) = h(x) = 0 \end{cases}$

Rita $u(x, t)$ då $ct = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$.

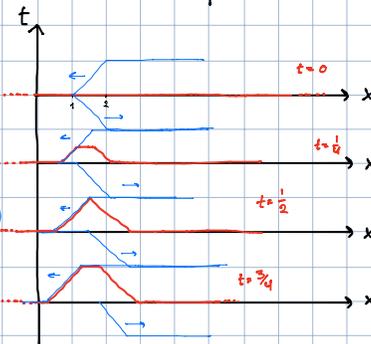
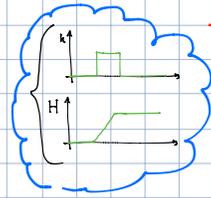
d'Alemberts formel ger $u(x, t) = \frac{1}{2} (g(x-ct) + g(x+ct))$



Ex) PDE: $u_{tt}'' - u_{xx}'' = 0, x \in \mathbb{R}, t > 0$
 BV₁: $u(x, 0) = g(x) = 0$
 BV₂: $u_t(x, 0) = h(x) = \theta(x-1) - \theta(x-2)$

Rita för $t = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$

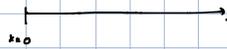
$H(x) = (x-1)\theta(x-1) - \theta(x-2)$
 \downarrow
 $u(x, t) = \frac{1}{2} H(x+ct) - \frac{1}{2} H(x-ct)$



Ex) Kan man skapa en våg som bara går åt höger? d'Alembert ger $u(x, t) = \frac{1}{2} (g(x-ct) + g(x+ct)) + \frac{1}{2c} H(x+ct) - \frac{1}{2c} H(x-ct)$
 $= 0$ ger högerväg

Ja! Om $\frac{1}{2}g + \frac{1}{2c}h = 0 \Rightarrow h = -cg$

Ex) Sträng inspänd i $x=0, x>0, c=1$

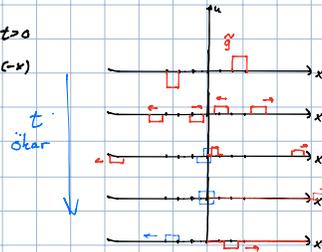


$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 \\ u(0,t) = 0 \\ u(x,0) = g(x) = \theta(x-2) - \theta(x-3) \\ u_x(x,0) = h(x) = 0 \end{cases}$$

d'Alembert gäller bara på ∞ områden. Hur gör vi nu? \Rightarrow Spiegling i $x=0$. (udda)

Lös istället problemet
$$\begin{cases} V_{tt} - V_{xx} = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ V(t,0) = \tilde{g}(x) = g(x) - g(-x) \\ V_x(x,0) = h(x) = 0 \end{cases}$$

Enligt animationen till höger stämmer speglingssatsen med intuitionen!



Ex) Halvövändlig sträng med lös ände, typ kajkant

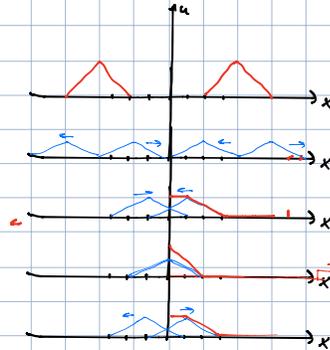
$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 \\ u_x(0,t) = 0 \\ u(x,0) = g(x) = (1-|x-2|)(\theta(x-2) - \theta(x-3)) \\ u_x(x,0) = 0 \end{cases}$$

Liksom innan så speglar vi för att få använda d'Alembert

dena gång jänna spegling förstås

Stämmer även här med intuition: vågen skvalpar upp och återvänder sedan rättvänd.

t ökar



Ex) Sträng fast i $x=0$ och $x=\pi$. Vid $t=0$ formen sinit och hastighet 0. Tricket är att spegla udda upprenat så vi får hela reella axeln!

Vi får stående våg!

