Repetition ODE:

$$\begin{cases} y'' + cy = f & t>0 \\ y(0)=\alpha \quad y'(0)=\beta \end{cases} \xrightarrow{\mathcal{L}} \begin{cases} \mathcal{L}_{II} f(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt \\ \mathcal{L}_I f(s) = \mathcal{L}_{II}(\theta f) \end{cases}$$

$\left(\mathcal{L}(f') = s^2 \mathcal{L}_I(f) - sf(0) - f'(0)\right)$

$\downarrow$

$$(s^2 + c)\mathcal{I}_I(y) - s\alpha - \beta = \mathcal{I}_I(f)$$

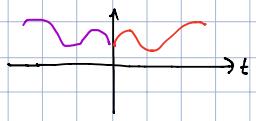
Vi kan utvidga ODE på hela $\mathbb{R}$ genom udda/jämn spegling (transformmetoder fungerar bäst på "hela" områden.)

y_- udda utvidgning av y:

$$y_-(t) = \begin{cases} y(t) & t>0 \\ -y(t) & t<0 \end{cases} = y(t)\theta(t) + y(-t)(1-\theta(t))$$

y_+ jämn utvidgning:

$$y_+(t) = \begin{cases} y(t) & t>0 \\ y(-t) & t<0 \end{cases} = y(t)\theta(t) + y(-t)(1-\theta(t)) \quad (= y\theta + \check{y}\check{\theta})$$



Lemma D.3

$$\begin{cases} y'' + cy = 0 & t>0 \\ y(0)=\alpha \end{cases} \iff y_-''(t) + c y_-(t) = 2\alpha\delta', \quad t\in\mathbb{R}$$

(ett resultat av sluarven)

Dirichletvillkor → udda utvidgning

$$\begin{cases} y'' + cy = 0 & t>0 \\ y'(0)=\beta \end{cases} \iff y_+''(t) + c y_+(t) = 2\beta\delta \quad t\in\mathbb{R}$$

Neumannvillkor → jämn utvidgning

Bevis (udda):

$$y_- = y\theta - \check{y}\check{\theta},$$

$$y_-' = y'\theta + y\theta' + \check{y}'\check{\theta} + \check{y}\check{\theta}' = y'\theta + y(0)\delta + \check{y}'\check{\theta} + \check{y}(0)\delta = y'\theta + \check{y}'\check{\theta} + 2y(0)\delta$$

(sätter vi ihop dessa får vi enl. ovan.)

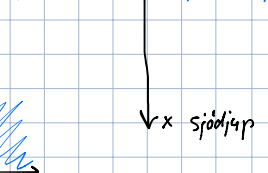
$$y_-'' = y''\theta + y'(0)\delta - \check{y}''\check{\theta} - \check{y}'(0)\delta + 2y(0)\delta' = y''\theta - \check{y}''\check{\theta} + 2y(0)\delta'$$

Speglingsmetoder för PDE

Ex *Halvoändligt område:*

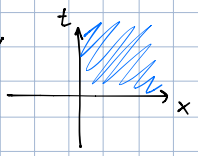
I en djup sjö är vattnet rent. Från tiden $t=0$ täcks ytan av en förorening med konstant halt. Föroreningen diffunderar ner. Modellera med fysikaliska konstanter $=1$!

$u(x,t)$ halt vid tiden t och djupet x.



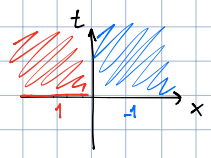
$$\begin{cases} \text{PDE: } u_t' - u_{xx}'' = 0 & t>0 \quad x>0 \\ \text{RV } u(0,t)=1 & t>0 \\ \text{BV } u(x,0)=0 & x>0 \end{cases}$$

Lösningen vi söker finns i detta område:



Först homogeniserar vi RV! : $u = v + 1$:

$$\begin{cases} v'_t - v''_{xx} = 0 \\ v(0,t) = 0 \\ v(x,0) = -1 \end{cases}$$



Nu speglar vi udda map x!

Lemma D3

$$\begin{cases} \text{PDE: } \partial_t v_- - \partial_x^2 v_- = 0 \\ \text{RV: (inga randvärden)} \\ \text{BV: } v_-(x,0) = -1\cdot\theta(t) + 1\cdot\theta(-t) = -\operatorname{sgn}(x) \end{cases}$$

HL blir noll pga det homogena RV!! $y(0,t)=0$. Vi måste alltid homogenisera - vi kan inte riktigt hantera det icke-homogena fallet.

(udda spegling)

Detta problem löste vi förra föreläsningen:

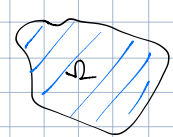
$v_- = v$ för $x>0$

$$v_-(x,t) = -\operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4t}}\right) \Rightarrow u(x,t) = 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4t}}\right)$$

kapitel 5

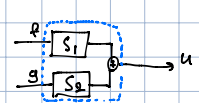
Laplace ekvation med Dirichletvillkor:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{i } \Omega \\ u = g & \text{på } \partial\Omega \end{cases} \ldots$$



Detta delar vi upp i 2 delar pga linjärites:

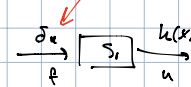
$$\begin{cases} -\Delta u_1 = f & \text{i } \Omega \\ u_1 = 0 & \text{på } \partial\Omega \end{cases} \quad \text{och} \quad \begin{cases} -\Delta u_2 = 0 & \text{i } \Omega \\ u_2 = g & \text{på } \partial\Omega \end{cases} \Longrightarrow u = u_1 + u_2$$



från SoT vet vi att impulsvaret är bra att ha!

$$\Rightarrow u(x) = \int_\Omega k(x,\alpha) f(\alpha)\, d\alpha$$

deltapuls in!



$k(x,\alpha)$ = källfunktion

fallet ovan är ej TI .....

OM: systemet är LTI (translations-/bidsinvariant), räcker att hamna källfunktionen då $\alpha = 0$

$$k(x) = k(x,0) \Rightarrow k(x) = \int_\Omega k(x-\alpha,0) f(\alpha)\, d\alpha = \int h(x-\alpha) f(\alpha)\, d\alpha = h * f$$

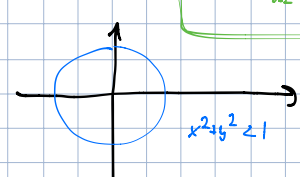
Förra gången:

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{på } \mathbb{R} \\ u(x,0) = g(x) & \text{på } \mathbb{R} \end{cases} \Longrightarrow u(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-a}^{b} \frac{y}{(x-\alpha)^2 + y^2}\, g(\alpha)\, d\alpha$$

$$\boxed{\begin{aligned} u_1(x) &= \int_\Omega k_1(x,\alpha) f(\alpha)\, d\alpha \\ u_2(x) &= \int_{\partial\Omega} k_2(x,\alpha)\, g(\alpha)\, d\alpha \end{aligned}}$$

Ex Dirichlets problem på enhetscirkeln:

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{på } \Omega \\ u = g & \text{på } \partial\Omega \end{cases}$$



Ej translationsinvariant, men Rotationsinvariant i θ-led. Räcker då att lösa då $g(\theta) = \delta(\theta)$ (impuls) i polära koord:

$$\begin{cases} -\frac{1}{r}\partial_r(r\partial_r u) - \frac{1}{r^2}\partial_\theta^2 u = 0 \\ u(1,\theta) = \delta(\theta) \end{cases} \longrightarrow \text{Ansätt } u(r,\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k(r) e^{ik\theta}. \text{ Insatt i PDE:}$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \left(u_k'' + \frac{1}{r}u_k' - \frac{k^2}{r^2}u_k \right) e^{ik\theta} = 0 \longrightarrow \text{har lösningen } u_k(r) = \begin{cases} a_k r^k + b_k r^{-k}, & k \neq 0 \\ a_0 + b_0 \ln(r), & k = 0 \end{cases}$$

$u(1,0) = \sum_{-\infty}^{\infty} u_k(1) e^{ik\theta} = \delta(\theta)$. Skalärprodukt gör som vanligt (OBS konjugat) $u(1) = \frac{1}{2\pi}$

u_k begränsad $\Rightarrow u_k = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} r^k & k > 0 \\ \frac{1}{2\pi} r^{-k} & k < 0 \\ \frac{1}{2\pi} & k = 0 \end{cases} \Rightarrow$ Sätt in $\frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} (re^{i\theta})^k = \dots = \text{impulssvar för enhetscirkeln} = \frac{1}{2\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\theta}$