

Snabbrepetition:

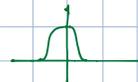
bestämms med stor behållning  
distribueras naturligt

komposit + stiel  
sluten och begränsad

Distributioner:  $U \in \mathcal{D}'$  beskrivs av verkan på testfunktioner  $\varphi \in C_0^\infty$

$U(\varphi) \in \mathbb{R}$ .  $\varphi \rightarrow U(\varphi)$  linj, är kontinuerlig.  $U(\varphi_n) \rightarrow 0$ ,  $\varphi_n \rightarrow 0$   
Distributioner utsträcker funktionerna.

typisk testfunktion:



Ex) f integrerbar definierad distribution  $U_f \in \mathcal{D}'$  genom

$$U_f(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x) dx$$

Ex)  $\delta(\varphi) = \varphi(0)$  "Diracs deltafunktion"

Räkneregler:

+U+V går bra

$(U+V)(\varphi) = U(\varphi) + V(\varphi)$

U.V går inte alls. Man tappar alltid någon egenskap vid utsträckningar.

$\delta^2$  finns ej.

För snälla funktioner  $g \in C^\infty$ ,  $U \in \mathcal{D}'$   $(gU)(\varphi) := U(g\varphi)$ :  $U_f(g\varphi) = \int f(x)g(x)\varphi(x) dx$ ,  $U_{fg}(\varphi) = \int f(x)g(x)\varphi(x) dx = \int f(x)g(x)\varphi(x) dx = U_f(g\varphi) = U_f(g\varphi)$

Derivator: Derivator är det inget konstigt med!  $U_f'(\varphi) = \int f'(x)\varphi(x) dx = [f(x)\varphi(x)]_{-\infty}^{\infty} - \int f(x)\varphi'(x) dx = -U_f(\varphi')$

$U \in \mathcal{D}'$  har derivata  $U' \in \mathcal{D}'$ :  $U'(\varphi) = -U(\varphi')$ . Exempelvis  $\theta'(x) = \delta(x)$

$\theta'(\varphi) = -\theta(\varphi') = -\int_{-\infty}^{\infty} \theta(x)\varphi'(x) dx = -\int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(x) dx = -[\varphi(x)]_{-\infty}^{\infty} = \varphi(0) = \delta(\varphi)$   
enkelt ovann.

Primitiver: Primitiver: U primitiv till V om  $U' = V$ . Enklaste:  $U' = 0$  har lösningen  $U = C$ .

Ex)  $U' + 2U = 0$ . Multiplicera med  $e^{2x} \in C^\infty \Rightarrow U = C e^{-2x}$   
trivial lösning är repuliterna till den homogena ekvationen ovan.

Ex)  $U' = \theta \rightarrow U = x\theta$ :  $U' = (x\theta)' = x\theta' + \theta = \theta + x\delta = \theta$ . Visat!  $(U-x\theta)' = 0 \Rightarrow U = x\theta + C$   
alla lösningar

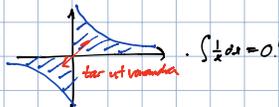
"Diff-ekv blir nästan samma sak som tillgång"

"Vanliga ekvationer"

Ex)  $xU = 0$  klassiskt  $U = 0$ . I distributionsmening finns en icke-trivial lösning (vånga lösningar)  $U = C\delta$   
 $x^k U = 0$  ger  $U = \sum_{j=0}^{k-1} c_j \delta^{(j)}$

Ex)  $xU = 1$  klassiskt  $U = \frac{1}{x}$ ,  $x \neq 0$ . Kan ej överföra till det. Inte integrerbar runt nollan (vilket är krävt).  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x} \varphi(x) dx$  (räde divergerar. Vi använder ett löp!

Principalvärden:  $p.v.(\frac{1}{x}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{1}{x} \varphi(x) dx + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{1}{x} \varphi(x) dx$ . Vi säger att integralen konvergerar enk.  
Detta gör ej att göra i klassiskt mening



$|x|^{-1}$  integrerbar:  $(U_{|x|^{-1}})' = p.v.(\frac{1}{x})$

$xU = 1 \Rightarrow U = p.v.(\frac{1}{x}) + C\delta$   
Vi säger enk ovann denna är integrerbar

Faltningar  $\varphi, \psi \in C_0^\infty$   $(\varphi * \psi)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x-y)\psi(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y)\psi(x-y) dy$

$U \in \mathcal{D}'$ ,  $\varphi \in C_0^\infty$   $(U * \varphi)(x) = U(\varphi(x-\cdot))$   
Verkar där

(Ex)  $\delta * \varphi = \delta(\varphi(x-\cdot)) = \varphi(x-0) = \varphi(x)$ . Behovt  $\delta * \varphi = \varphi$

Om  $\psi(y) = \varphi(x-y)$ ;  $\delta' * \varphi = \delta'(\psi) = -\delta(\psi') = -\psi'(0) = +\varphi'(x-y)|_{y=0} = \varphi'(y)$ . Behovt  $\delta' * \varphi = \varphi' \rightarrow \delta^{(n)} * \varphi = \varphi^{(n)}$

Gränsvärden  $\mathcal{U}_n \in \mathcal{D}'$   $\mathcal{U}_n \rightarrow \mathcal{U}$  i  $\mathcal{D}'$  då  $h \rightarrow \infty$  om  $\mathcal{U}_n(\varphi) \rightarrow \mathcal{U}(\varphi)$  för alla  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$

(Ex)  $f$  styckvis kontinuerlig så att  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$ . Tex  $f = \begin{cases} \frac{1}{2} & -1 < x < 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$  

Sätt  $\mathcal{U}_n(x) = n f(nx)$   
 $\mathcal{U}_n(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} n f(nx) \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \varphi(\frac{y}{n}) dy \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \varphi(0) dy = \varphi(0) \int_{-\infty}^{\infty} f(y) dy = \varphi(0) = \delta(\varphi)$

Fouriertransformer

klassiskt  $\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x) dx$ . Räkninglar  $\widehat{f'} = i\xi \widehat{f}$ ,  $\widehat{x f} = i \frac{d}{d\xi} \widehat{f}$ ,  $\widehat{x * f} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}$ ,  $\widehat{f} = 2\pi \widehat{f}(-x)$

Parsvals formel:  $\int \widehat{f}(y) g(x) dx = \int f(x) \widehat{g}(y) dx$ . Mått:  $\widehat{\mathcal{U}}(\varphi) = \mathcal{U}(\widehat{\varphi})$  - detta går inte alltid ty det kompakta stödet 'släms bort'... vi måste därigenom

Nya testfunktioner:  $\mathcal{S} = \{ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}); x^k \varphi \text{ begränsad för alla } k, m \}$ . Exempelvis  $e^{-x^2} \in \mathcal{S}$  

$\varphi \in \mathcal{S}$ ,  $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}$ ,  $x^k \varphi \in \mathcal{S}$   $\partial^m \varphi \in \mathcal{S}$

Ny klass av distributioner tempererade dit  $\mathcal{S}'$

(Ex)  $\widehat{\delta}(\varphi) = \delta(\widehat{\varphi}) = \widehat{\varphi}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix \cdot 0} \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = \mathcal{U}_1(\varphi) = 1(\varphi) \rightarrow$  alltså  $\widehat{\delta} = 1$  Alla räkninglar gäller fortfarande!!