

Gammafunktionen:  $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$ ,  $\Gamma(n) = (n-1)!$   $n \in \mathbb{Z}_+$

Besselfunktionen:  $e^{iz\sin\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} J_n(z) e^{in\theta}$ ,  $J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} e^{i(z\sin\theta - n\theta)} d\theta$   $n \in \mathbb{Z}$ .  $J_n(0) = 0$  förutom  $J_0(0) = 1$

Nyttom vi har av Besselfunktionen, är att den löser D.E:  $u'' + \frac{1}{r} u' + \left(\lambda - \frac{v^2}{r^2}\right) u = 0$ .

$$e^{iv\theta} = e^{ir\sin\theta}$$

$$\Delta e^{iv\theta} = i^2 e^{iv\theta} = -e^{iv\theta} \Rightarrow (\Delta + v^2) e^{iv\theta} = 0, \text{ vilket i polära koordinater blir } \left(\partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 + 1\right) e^{iv\sin\theta} = \left[e^{iv\sin\theta} = \sum J_n(r) e^{in\theta}\right] = \sum [J_n'' + i J_n' + \left(-\frac{n^2}{r^2}\right) J_n] e^{in\theta} = 0$$

Bra att veta är att  $J_n(r) \propto \frac{a}{r^{|l|}} \sin(r + \phi)$  för stora  $r$ :  $J_n(r)$  har oändligt många nollställen, dock ej med regelbundenhet som för sinus

Sats:  $u'' + \frac{1}{r} u' + \left(\lambda - \frac{v^2}{r^2}\right) u = 0$  har den allmänna lösningen

$$\begin{cases} a J_\nu(i\lambda r) + b Y_\nu(i\lambda r) & \text{om } \lambda > 0 \\ ar^\nu + br^{-\nu} & \text{om } \lambda = 0, \nu \neq 0 \\ a + b \ln(r) & \text{om } \lambda = \nu = 0 \end{cases}$$

För  $v = \frac{1}{2} + l$ ,  $l \in \mathbb{Z}$  blir  $J_\nu$  speciellt enkel. Exempelvis  $J_{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\pi r} \sin r$

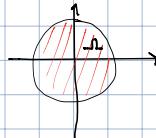
Vi inför  $j_\nu(r) = \frac{\pi}{2r} \cdot J_\nu(r)$  och  $y_\nu(r) = \sqrt{\frac{\pi}{2r}} Y_{\nu+1/2}(r)$

Sats:  $u'' + \frac{2}{r} u' + \left(\lambda - \frac{l(l+1)}{r^2}\right) u = 0$  har den allmänna lösningen

$$\begin{cases} a j_\nu(i\lambda r) + b y_\nu(i\lambda r) & \text{om } \lambda > 0 \\ ar^l + br^{-l-1} & \text{om } \lambda = 0, l \neq -1/2 \\ \frac{a+b \ln(r)}{\sqrt{r}} & \text{om } \lambda = 0, l = -1/2 \end{cases}$$

Exempel: Värmeledning på enhetscirkeln:

$$\begin{cases} \text{PDE: } \partial_{tt} u - \Delta u = 0 \quad t > 0, x^2 + y^2 \leq 1 \\ \text{RV: } u(x, y, t) = 0 \quad x^2 + y^2 \leq 1, t > 0 \\ \text{BV: } u(x, y, 0) = u_0(x, y) \quad x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases}$$



Vi kör på vår vanliga strategi: variabelseparation!

$$u(x, y, t) = T(t) \cdot V(x, y).$$

Sätt in ansatsen i PDE och separera trå D.E ur detta:

$$T'' + \lambda T = 0 \Rightarrow T(t) = e^{-i\lambda t}$$

$$\begin{cases} -\Delta V = \lambda V \\ V = 0 \text{ på randen} \end{cases}$$

Byt till polära koöd:  $V(r, \varphi)$

$$\begin{cases} \left(\partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_\varphi^2\right) V = \lambda V \\ V(1, \varphi) = 0, V \text{ begr. då } r \rightarrow 0 \end{cases} \text{ Koordinatbytet väller ett problem här: PDE idag singular, varför vi måste införa det sista kravet.}$$

Variabelseparation (gen) ger nu  $v(r, \varphi) = R(r)\phi(\varphi)$

$$\begin{cases} (\partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r + (\lambda - \frac{\mu}{r^2}))R = 0 & \leftarrow \text{variabelseparation gav denna form. Se F.13 för flera beräkningar} \\ R(1), R \text{ begr. } \partial^2 r \rightarrow 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_r^2 \phi + \mu \phi = 0, \phi \text{ 2\pi-periodisk} & \text{Se F.13} \end{cases}$$

Dessa löser nu för sig. φ-beroende del enklast:

$$* \partial_r^2 \phi + \mu \phi = 0, \mu > 0 \Rightarrow \phi(r) = a \cos(\sqrt{\mu}r) + b \sin(\sqrt{\mu}r) \quad 2\pi\text{-periodisk om } \sqrt{\mu} \text{ är ett heltalet}$$

$$\mu = 0 \Rightarrow \phi(r) = a + b\varphi$$

$\mu < 0$  existerar inte ty vi vet att DE kan uttryckas med en SL-operator.

Vi har lösning då  $\mu = n^2, n \in \mathbb{Z}_+$

$$\begin{aligned} * (\partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r + (\lambda - \frac{\mu}{r^2}))R = 0, \lambda = 0, n = 0 \Rightarrow R(r) &= a + b\ln r && \text{stråle av RV:} \\ &\quad \text{stråle ty obegränsad för } r \rightarrow 0 \\ \lambda > 0, n > 0 \Rightarrow R(r) &= ar^n + br^{-n} && \text{stråle av samma slags} \\ \lambda > 0 &\Rightarrow R(r) = a J_n(\sqrt{\lambda}r) + b Y_n(\sqrt{\lambda}r) && \text{denna är obegränsad} \\ R(1) = a J_n(\sqrt{\lambda}) &= 0 \Leftarrow \text{här }\infty\text{-mängd lösningsar. Stämmer om } \sqrt{\lambda} = \lambda_{nk}, k \in \mathbb{Z}_+, \lambda \text{ nollfälle!} \end{aligned}$$

Lösningarna kan här alltså skrivas:  $R(r) = J_n(\alpha_{nk}r)$  och  $\phi(r) = a \cos(\sqrt{\lambda}r) + b \sin(\sqrt{\lambda}r)$

$$V_{nk}^{cos}(r, \varphi) = J_n(\alpha_{nk}r) \cos(n\varphi) \quad V_{nk}^{sin}(r, \varphi) = J_n(\alpha_{nk}r) \sin(n\varphi)$$

Dessa bildar bas i  $L_2(r, [0, \infty) \times [0, 2\pi])$ . Ortomogala i skalärproduktet  $(f | g) = \int_0^{\infty} f(r, \varphi) g(r, \varphi) r dr d\varphi$

Ursprungspålemet har lösningen

$$u(r, \varphi, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( c_{nk}^{cos} T_{nk}(t) V_{nk}^{cos}(r, \varphi) + c_{nk}^{sin} T_{nk}(t) V_{nk}^{sin}(r, \varphi) \right)$$

OBS:  $\left\{ \begin{array}{l} \text{genom} \\ \text{genom} \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{v} \\ \text{v} \end{array} \right\}_{n=0}^{\infty}$

$$u(r, \varphi, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_{nk}^2 t} a_{nk} J_n(\alpha_{nk}r) \left( c_{nk}^{cos} \cos(n\varphi) + c_{nk}^{sin} \sin(n\varphi) \right)$$

BV ger nu  $u(r, \varphi, 0) = u_0(r, \varphi) = \sum c_{nk}^{cos} V_{nk}^{cos} + c_{nk}^{sin} V_{nk}^{sin}$ , där koefficienterna bestäms av projektionsformeln  $c_{nk}^{cos} = \frac{(u_0 | V_{nk}^{cos})}{\| V_{nk} \|^2} = \frac{SS(\dots)}{SS(\dots)}$