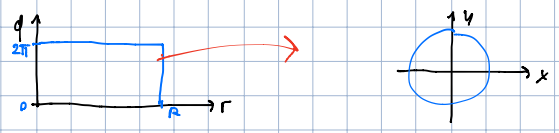
- Lång och trist genomgång av duggan...

Vi kommer snart att gå in på cirkulära områden. Hur hanteras dessa? Variabelbytet $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, avbildar ett cirkulärt område på ett kvadratiskt:



* Fortsättning Speciella funktioner:

· Värmeledning i två rumsdimensioner. Ω = enhetscirkeln.

PDE: $\partial_t u - \alpha \Delta u = 0$

RV: $u|_{\partial\Omega} = 0$

BV: $u(x,y,0) = u_0(x,y)$ ← given.

Lösning: Variabelseparation!

$u(x,y,t) = \sum c_k T_k(t) u_k(x,y)$. Sätter vi in denna ansats i PDE på:

$$\partial_t - \alpha\Delta u = \sum c_k (T_k' u_k - \alpha T_k \underbrace{\Delta u}_{= -\lambda u}) = 0$$

← Vi antar att detta fungerar! Att differentialoperatorn är ett egenvärdesproblem.

$$\Updownarrow \begin{cases} T_k' u_k + \alpha\lambda T_k u_k = 0 \\ T_k' + \alpha\lambda_k T_k = 0 \end{cases} \longrightarrow \underline{\underline{T_k(t) = e^{-\lambda_k \alpha t}}}$$

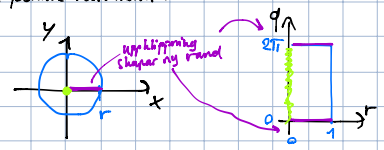
Den rumsberoende delen har vi givit formen

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda_k u_k \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

Vi identifierar SL-operatorn $-\Delta = A$, $\mathcal{D}_A = \{u \in C^2(\Omega);\ u|_{\partial\Omega} = 0\}$, $(f|g) = \iint_\Omega f(x,y)\cdot g(x,y)\,dx\,dy$ $L^2(\Omega)$

Inför nu variabelbytet i polära koordinater:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$



$\Updownarrow$

$A = -\Delta = -\left(\partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2\right)$ ← Laplaceoperatorn i polära koordinater

$\mathcal{D}_A = \{u \in C^2([0,1] \times [0,2\pi]);\ \underline{u(1,\varphi) = 0};\ \underline{u(r,\varphi)\ 2\pi\text{-periodisk i } \varphi};\ \underline{u \text{ begränsad då } r=0}\}$ OBS: Dessa randvillkor är viktiga. Tänk efter!

"produktmängd"

Områdets origo, som ger upphov till den nya randen $u(0,\varphi)$ är problematiskt och ger upphov till en del behandlingar. Lösningen får konstiga egenskaper som beror just på koordinatbytet. Dessa måste "tas bort" efter lösning.

I det nya området blir skalärprodukten:

$$(f|g) = \int_0^1\int_0^{2\pi} \tilde{f}(r,\varphi)\cdot\tilde{g}(r,\varphi)\cdot \underbrace{r}_{\text{denna, funktionaldeterminanten, blir en viktfunktion } \underline{\underline{w(r,\varphi) = r}}}\,d\varphi\,dr, \quad \text{mängden blir } L_2(w, [0,1]\times[0,2\pi])$$

Operatorräkning ger nu

$$\Delta u + \lambda u = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{r}\partial_r(r\partial_r R)\varphi + \frac{1}{r^2}R\varphi'' + \lambda R\varphi = 0$$

$$\Updownarrow \quad r\cdot\frac{\partial_r(r\partial_r R)}{R} + \lambda r^2 = -\frac{\varphi''}{\varphi} = -\mu, \text{ konstant}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \varphi'' + \mu\varphi = 0 \\ \varphi \ 2\pi\text{-periodisk} \end{cases} \quad \text{och} \quad \begin{cases} R'' + \frac{1}{r}R' + \left(\lambda - \frac{\mu}{r^2}\right)R = 0 \\ R(1) = 0, \ R(0) \text{ begränsad} \end{cases}$$

Denna löses enkelt liht tidigare.

Vi ser att detta är precis Bessels differentialekvation, vilket är anledningen till att vi har gått igenom denna. Har inga enkla lösningar tyvärr. Lösningen ser ut:

obegränsad. Denna strykes alltså enligt tidigare resonemang.

$$R(r) = A J_n(\sqrt{\lambda} r) + B J_n(\sqrt{\lambda} r)$$