Lösning av PDE:

- hittills: Variabelseparation och serieutvecklingar
- nu: egenfunktionsutvecklingar, ortogonala basfunktioner:

Exempel 3.10

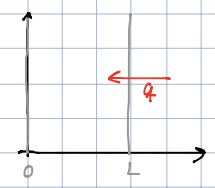
Vägg med tjocklek L, $T(0)=T_0$ som omgivningen. Vid $x=0$ leds konstant värmeström $j=q$ enligt figur:

problemet nämner inget om konstanter, så de tas med

$$\begin{cases} \text{PDE:} & u'_t - \alpha u''_{xx} = 0 \\ \text{RV:} & u(0,t)=T_0, \quad -\lambda u'_x(L,t) = -q \\ \text{BV:} & u(x,0)=T_0 \end{cases}$$

ingen värmeproduktion i väggen nämns

OBS! Blandad Dirichlet och Neumann!



Blandningen av RV gör att vi inte direkt kan ansätta en serieutveckling som lösning.
Vi försöker likt tidigare att homogenisera RV. Detta går ty RV är enkla och inte beror på tiden! Vi söker stationär lösning $\tilde{u}(x)$:

$$\begin{cases} \tilde{u}''_{xx} = 0 \\ \tilde{u}(0)=T_0, \ \tilde{u}'_x(L) = \frac{q}{\lambda} \end{cases} \iff \begin{cases} \tilde{u}(x) = ax+b \\ \tilde{u}(0) = b = T_0, \ \tilde{u}'_x(L) = a = \frac{q}{\lambda} \end{cases} \Longrightarrow \tilde{u}(x) = \frac{q}{\lambda}x + T_0$$

Vi bildar lätt innan: $u(x,t) = \tilde{u}(x) + v(x,t)$, vilket ger:

$$\begin{cases} \text{PDE:} & v'_t - \alpha v''_{xx} = 0 \\ \text{RV:} & v(0,t)=0 \quad v'_x(L,t) = 0 \\ \text{BV:} & v(x,0) = \left(T_0 - \frac{q}{\lambda}x - T_0\right) = -\frac{q}{\lambda}x \end{cases}$$

Vad gör vi nu för ansats till lösning? $\Longrightarrow$ Vi vill göra utveckling i en bas som passar med PDE. Sätter därför SL-operatorn $\mathcal{A} = -\partial_x^2$, $\mathcal{D}_{\mathcal{A}} = \{u \in C^2([0,L]) \mid u(0) = u'(L) = 0\}$. Vi söker nu ϕ_k:

där konstanten α nu ej ingår

$$\Downarrow \ \mathcal{A}\phi_k = \lambda_k \phi_k$$
$$\Downarrow \ -\phi''_k = \lambda_k \phi_k$$
$$\Downarrow \ -r^2 = \lambda_k$$
$$\left.\begin{cases} \phi_k = A_k \cos(\sqrt{\lambda_k}x) + B\sin(\sqrt{\lambda_k}x) \\ \phi_k(0) = A_k = 0, \quad \phi'_k(L) = B\sqrt{\lambda_k}\cos(\underbrace{\sqrt{\lambda_k}L}_{\pi/2 + k\pi}) = 0 \end{cases}\right\} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_k = \frac{1}{L^2}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^2 = \frac{\pi^2}{L^2}\left(k+\frac{1}{2}\right)^2 \\ \phi_k(x) = B_k \sin(\sqrt{\lambda_k}x) = B_k \sin\left(\frac{\pi}{L}\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right) \end{cases}$$

← krav för att $B \neq 0$

$\phi_k(x)$ är nu en ON-bas enligt sats. Vi söker nu lösning på formen

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(t)\phi_k(x).$$

Insättning i PDE ger då:

$$\Downarrow \ \sum\left(v'_k(t)\phi_k(x) + \alpha v_k(t)\mathcal{A}\phi_k(x)\right) = \sum\left(v'_k(t) + \alpha\lambda_k v_k\right)\phi_k = 0$$

$$v'_k(t) + \alpha\lambda_k v_k(t) = 0 \Longrightarrow v_k(t) = c_k e^{-\alpha\lambda_k t} \Longrightarrow v(x,t) = \sum c_k e^{-\alpha\lambda_k t}\phi_k(x)$$

← denna löser PDE och RV!

Nu löser vi BV!

utveckling i serie!

$$v(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \phi_k(x) = -\frac{q}{\lambda}x$$

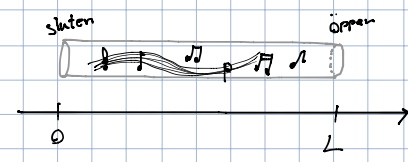
Projektionssatsen ger då att $c_k = \dfrac{(\phi_k | -\frac{q}{\lambda}x)}{(\phi_k|\phi_k)} = \dfrac{\int_0^L -\frac{q}{\lambda}x\,\phi_k(x)\,dx}{\int_0^L \phi_k^2(x)\,dx} = [\ldots] =$

Sammanfattningsvis: $u(x,t) = \frac{q}{\lambda}x + T_0 + v(x,t)$

Exempel 3.12:

Ljud ur orgelpipa.

$u(x,t)$ - relativa lufttrycksförändringar.



$$\begin{cases} \text{PDE: } u''_{tt} - c^2 u''_{xx} = 0, \quad 0<x<L, \quad t>0 \\ \text{RV: } \underbrace{u'_x(0,t) = 0}_{\text{sluten ände}}, \quad \underbrace{u(L,t) = 0}_{\text{öppen ände}} \\ \text{BV: } \underline{\qquad\qquad} \end{cases}$$

← Omvänden RV jämfört med tidigare exempel!

Sturm-Liouville: $\mathcal{A} = -\partial_x^2$, $H = L^2([0,L])$, $\mathcal{D}_A = \{u \in C^2([0,L]);\ u'(0)=0,\ u(L)=0\}$

Egenvektorerna φ_k till $\mathcal{A}$ bildar ortogonal bas till L^2. De blir:

$$\varphi_k(x) = \cos(\sqrt{\lambda_k}\,x), \quad \lambda_k = \left(\left(k+\tfrac{1}{2}\right)\tfrac{\pi}{L}\right)^2.$$

Ansätt $u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(t)\varphi_k(x)$, där insättning i PDE ovan ger

$$v_k(t) = A_k \cos(c\sqrt{\lambda_k}\,t) + B_k \sin(c\sqrt{\lambda_k}\,t) = \underbrace{C_k}_{\text{amplitud}} \sin(c\sqrt{\lambda_k}\,t + \underbrace{\phi_k}_{\text{fas}})$$

$$u(x,t) = \sum_{0}^{\infty} c_k \sin(c\sqrt{\lambda_k}\,t + \phi_k)\cos(\sqrt{\lambda_k}\,x)$$

Egenfrekvensen blir $f_k = \frac{c\sqrt{\lambda_k}}{2\pi}$

Grundtonen blir: $f_0 = \frac{c\sqrt{\lambda_0}}{2\pi}$.