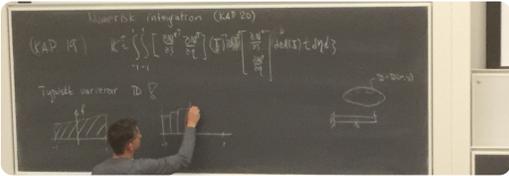


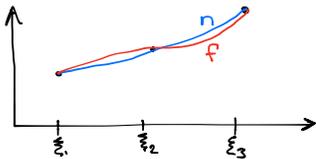
Föreläsning 11

Numerisk integration (kap 19)



Newton-Cotes

Idé: Istället för att integrera f så integrerar vi en funktion n som påminner om f



Hur tecknas $n(\xi)$?

3 punkter \Rightarrow 3 parametrar: $n(\xi) = \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \xi^2$

Lagrange interpolation:

$$n(\xi) = \frac{(\xi - \xi_2)(\xi - \xi_3)}{(\xi_1 - \xi_2)(\xi_1 - \xi_3)} f(\xi_1) + \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_3)}{(\xi_2 - \xi_1)(\xi_2 - \xi_3)} f(\xi_2) + \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)}{(\xi_3 - \xi_1)(\xi_3 - \xi_2)} f(\xi_3)$$

$n(\xi)$ är ett polynom som går genom punkterna $(\xi_i, f(\xi_i))$

Generellt för integraler:

$$n(\xi) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) l_k^{n-1}(\xi)$$

\swarrow lagrendrepolynom!

$$I = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \approx \int_{-1}^1 n(\xi) d\xi = \int_{-1}^1 \sum_{k=1}^n f(\xi_k) l_k^{n-1}(\xi) d\xi = \sum_k f(\xi_k) \underbrace{\int_{-1}^1 l_k^{n-1} d\xi}_{H_k} = \boxed{\sum f(\xi_k) H_k}$$

Finns i formelsamlingen!

Du måste alltid transformera om integralen till $-1 \rightarrow 1$

Med tre punkter kan vi integrera ett andragradspolynom korrekt, osv...

Gauss: n punkter \Rightarrow exakt integration av grad $2n-1$.

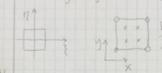
Full integration

Läs kapitel 20.3 långsamt och noggrant!

Vad var det vi kom fram till?
 Gaussintegration
 Med n kvadraturpunkter kan en polynom av grad $2n-1$ integreras exakt. ~~Exakt!~~

Hur många integrationspunkter ska jag välja?
 Full integration: innebär att jag väljer så många punkter att ett fykantigt element integreras exakt.

Dessa fyra integrationspunkter gör full integration för ett 4-nkantigt fykantigt element.



$$K_e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{D}(\mathbf{D})^T \left(\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \right) \det(\mathbf{J}) dx dy$$

$$N_i = 0.25(1 + \alpha_i x + \beta_i y + \alpha_i \beta_i xy)$$

Reducerad integration \rightarrow snabbhet! (ex. 4 gör snabbare i vektor ist för 4 rader på 4 rader) eller bättre lösning / kärna lösning



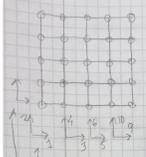
Uppg. Tänk dig att du är en integrationspunkt. Hur känns det?
 Det känns ok i x för jag marker ingenting av deformationen för ingenting är det ett bra svar. Detta kallas en nollenergid och uppkommer eller stivledd när man har reducerad integration

Kla strukturen ställer sig i triangelnader



Ingen av integrationspunkterna känner ingenting! Får fel!
 Man löser genom att stabilisera full integration för långa tid för ingenting.

Full integration



Frånsvader

$$bc = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

löser kan annars räkna ut alla sista rader för sig ett egenvärde 0.

Newtonkonv.

Projektet: packa ut innehållet i assem

Vad betyder egenvärdena?

$$\mathbf{V}_e^T \mathbf{K}_e \mathbf{V}_e = \mathbf{V}_e^T \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{V}_e = \int_{V_e} \xi^T \mathbf{J} dV = 2U$$

$$\mathbf{K} = \sum_i \mathbf{A}_i \mathbf{N}_i^T \mathbf{N}_i, \quad \mathbf{N}_i^T \mathbf{N}_i = \mathbf{A}_i$$

Har jag ett egenvärde som är noll har jag stora problem - då har jag kollapsning som gör sekulärprospiration.