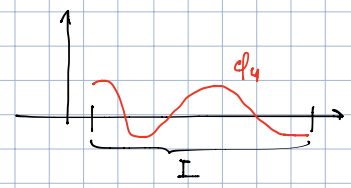
Sturm-Liouvilleoperatorn (Den reguljära)

Sats: Det finns en bas av parvis ortogonala egenfunktioner φ_k, med egenvärden av multiplicitet 1. φ_k har det $k-1$ stycken nollställen i det inre av I.

För varje $u \in D_A$ är $u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \varphi_k$ med likformig konvergens
$\Rightarrow$ vi kan <u>derivera termvis</u> och $Au = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k u_k \varphi_k$.



Exempel: $I = [0,1]$ $A = -\frac{d^2}{dx^2}$ ← SL-operator med $q=0$ och $w=1$

1) $D_A = \{u \in C^2 : u'(0) = u'(1) = 0\}$
2) $D_A = \{u \in C^2 : u(0) = 0, u'(1) = 0\}$

1) Vi söker λ_k och φ_k sådanna att $A\varphi_k = \lambda_k \varphi_k$ och $\varphi_k'(0) = \varphi_k'(1) = 0$

Lös: $\begin{cases} -\varphi_k'' = \lambda_k \varphi_k \\ \varphi_k'(0) = \varphi_k'(1) = 0 \end{cases}$

a) $\boxed{\text{Om } \lambda_k = 0}$, får vi $-\varphi_k'' = 0 \Rightarrow \varphi_k = ax + b$. Randvillkor ger nu $a = 0 \Rightarrow \varphi_k(x) = b$.
Alltså $\varphi_1(x) = 1$ är en egenvektor med egenvärde 0.

b) $\boxed{\text{Om } \lambda_k > 0}$: $-\varphi_k'' = \lambda_k \varphi_k(x) \Leftrightarrow \varphi_k = a \cdot \sin(\sqrt{\lambda_k} x) + b \cdot \cos(\sqrt{\lambda_k} x)$. RV ger $a = 0$ och $\lambda_k = \pi^2 k^2$
$\varphi_k(x) = b\cos(\pi k x)$ —— φ_k får inte vara 0. Är då ej egenfunktion.

Vi väljer $b = 1$, $\varphi_k(x) = \cos(\pi k x)$, $\lambda_k = \pi^2 k^2$, $k \in \mathbb{N}$

2) Nya RV $u(0) = 0$ och $u'(1) = 0$.

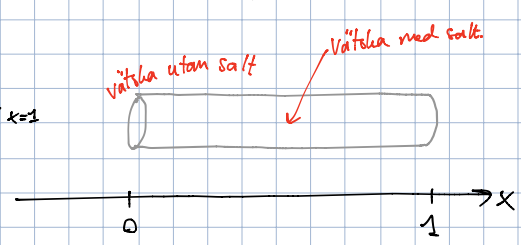
a) $\boxed{\lambda_k = 0}$ $\Rightarrow \varphi_k = ax + b$. RV ger $a = b = 0$. $\lambda_k = 0$ är <u>inte</u> ett egenvärde, ty $\lambda = 0 \Rightarrow \varphi = 0$ för alla x.
Nya randvärden $\rightarrow \lambda_k$ ändras!

b) $\boxed{\lambda_k > 0}$ $\Rightarrow \varphi_k = a \cdot \sin(\sqrt{\lambda_k} \cdot x) + b \cdot \cos(\sqrt{\lambda_k} x)$. RV ger $b = 0 \Rightarrow \varphi_k(x) = a\sin(\sqrt{\lambda_k} x)$ och $\sqrt{\lambda_k} = \frac{\pi}{2} + \pi k$
, $\lambda_k = (k + \frac{1}{2})^2 \pi^2$, $k \in \mathbb{N}$.

Vi har följande: $\varphi_k(x) = \sin((k + \frac{1}{2})\pi x)$ och $\lambda_k = (k + \frac{1}{2})^2 \pi^2$.

Exempel: Diffusion i rör

Vid $t = 0$ öppnas röret vid $x = 0$ och hålls slutet i $x = 1$
Diffusionsekvationen ger, med konc. $u(x,t)$.



$$\begin{cases} \text{PDE } \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ \text{BV } u(x,0) = 1 \quad 0 < x < 1 \\ \text{RV } u(0,t) = 0 \quad u_x'(1,t) = 0 \quad t > 0 \end{cases}$$

Vi inför $\overbrace{A = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}}^{SL}$, $D_A : \{u \in C^2([0,1]) : u(0) = u'(1) = 0\}$

Problemet får följande form:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + Au = 0 \\ u(x,0) = 1 \quad 0<x<1 \end{cases}$$

Egenvektorerna $\phi_k = \sin((k+\frac{1}{2})\pi x)$, $k \in \mathbb{N}$ utgör baas i $L_2([0,1])$
Vi kan skriva

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\phi_k(x) \quad , \quad (Au)(x,t) = [\text{Enligt tidigare sats}] = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \underbrace{\lambda_k \phi_k(x)}_{A\phi_k(x)}$$

Sätt in i PDE:

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k' \phi_k(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k u_k(t)\phi_k(x) = 0 \iff \sum_{k=1}^{\infty} (u_k'(t) + \lambda_k u_k(t))\phi_k(x) = 0$$

. Precis som i kap 3 gäller Fourierserien entydighet:

$$u_k'(t) + \lambda_k u(t) = 0, \ \forall k \iff u_k(t) = a_k e^{-\lambda_k t}$$

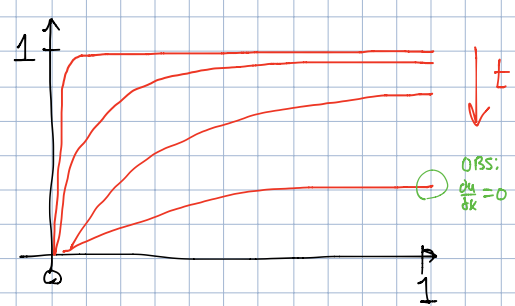
Vi har alltså att $u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k t}\phi_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{-(k+\frac{1}{2})^2\pi^2 t} \cdot \sin((k+\frac{1}{2})\pi x)$

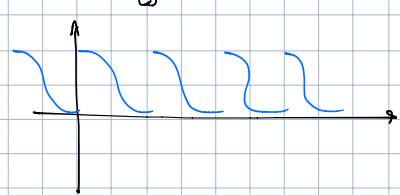
BV ger a_k precis som tidigare: $1 = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sin((k+\frac{1}{2})\pi x)$, där vi utvecklar 1 i en sinusserie, vilket ger $a_k = \frac{4}{(2k+1)\pi}$

Allmän Hilbertrumsteori säger att $1 = \sum a_k \phi_k$ där $a_k = \frac{(\phi_k, 1)}{\|\phi_k\|}$.

Vi får alltså att $\boxed{u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)\pi} e^{-(k+\frac{1}{2})^2\pi^2 t} \sin((k+\frac{1}{2})\pi x)}$

Ritas förloppet fås ungefär:





Periodisk SL-operator: $\mathcal{D}_A = \left\{ u \in C^2(I) : \begin{matrix} u(x_0) = u(x_1) \\ u'(x_0) = u'(x_1) \end{matrix} \right\}$

Finns även singulära SL-operatorer