Lösningsmetodik för FMAF01: Funktionsteori

Johannes Larsson, I12

10 mars 2014

1 Allmänt

Detta är lösningsmetoder för de vanligaste tentauppgifterna, grupperade efter hur ofta de kommer på tentan och därmed också efter hur mycket tid man bör lägga på respektive område, baserat på min egna uppfattning. Fel förekommer antagligen.

2 Rekursionsekvationer

2.1 Exempeluppgift

Lös $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 2^n$ med begynnelsevillkoret $x_0 = 0, x_1 = 1$.

2.2 Homogen lösning

Skriv om ekvationen till karaktäristiskt polynom och sätt till noll, d.v.s. $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n$ blir $x^2 - 5x + 6 = 0$. Om lösningen till den karaktäristiska ekvationen är x_1 och x_2 så blir den homogena lösningen $x_n^h = Ax_1^n + Bx_2^n$. Den homogena lösningen till exempeluppgiften blir $x_n^h = A2^n + B3^n$.

2.3 Partikulär lösning

Gör en ansats. Om uppgiften är ... $= 3^n$, gör ansatsen $x_n^p = C3^n$, d.v.s. multiplicera med en konstant. Om den homogena lösningen redan innehåller 3^n, multiplicera med en konstant och n, d.v.s. $x_n^p = Cn3^n$. Detsamma om uppgiften var ... $= n3^n$. För att sammanfatta, om uppgiften var ... $= (1 + 3n)4^n + 2^n$ och vi tidigare har fått homogen lösning till $x_n^h = A2^n$, gör ansatsen $x_n^p = Cn2^n + D4^n + En4^n$. Partikulärlösningen till exempeluppgiften blir $x_n^p = Cn2^n$.

2.4 Koefficienter

Vi har fått lösningen $x_n = x_n^h + x_n^p$. För att hitta koefficienterna till partikulärlösningen, sätt först in denna istället för x. Sätt sedan in $(n + 2)$, $(n + 1)$ och n på motsvarande platser, d.v.s. i exempeluppgiften skriv:

$$C(n + 2)2^{(n+2)} - 5(n + 1)2^{(n+1)} + 6nC \cdot 2^n = 2^n. \tag{1}$$

Lös ut C, i vårt fall $C = -1/2$. För A och B i den homogena lösningen, skriv den erhållna lösningen och lös för begynnelsevärdena:

$$A2^n + B3^n - \frac{1}{2}n2^n = 0, n = 0 A2^n + B3^n - \frac{1}{2}n2^n = 1, n = 1 \tag{2}$$

Vilket ger lösningen $A = -2$ och $B = 2$, alltså blir svaret:

$$x_n = -2 \cdot 2^n + 2 \cdot 3^n - \frac{1}{2}n2^n \tag{3}$$

3 Seriers konvergens

1. a_k går inte mot 0 då k går mot $\infty \Leftrightarrow$ divergent

   Exempel: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\arctan k}$

2. Alternerande serie som uppfyller Leibniz två villkor

   ($\mid a_k \mid$ avtagande, $\mid a_k \mid$ går mot 0)

   Exempel: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$

3. Absolutkonvergens

   Exempel: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$

4. Jämförelsetest på gränsvärdesform. Uppskatta en känd serie som är konvergent eller divergent och beräkna gränsvärdet $\lim_{k\to\infty} \frac{|a_k|}{|b_k|} = L$. Om $0 < L < \infty$ så är serierna båda konvergenta (eller divergenta).

   Exempel: $\sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{1}{k}$, med jämförelseserien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$, (L=1)

5. Kvottest och rottest (se formelsamling)

6. P-serie: $\frac{1}{k^p}$ konvergent om $p > 1$

7. Teleskopsumma där termerna går mot 0 $\Rightarrow$ konvergent

4 Potensserier

4.1 Exempeluppgift

Utveckla funktionen $f(z) = \frac{z}{(z+2)(z-2)}$ i en potensserie kring origo och ange seriens konvergensradie. Konvergerar serien för $z = 1 + i$? Beräkna $f^{(10)}(0)$.

4.2 Partialbråksuppdelning

$f(z)$ är fucking omöjlig att räkna på, så vi förenklar den med partialbråksuppdelning. Sätt $f(z) = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z-2}$. Då ska $A(z-2) + B(z+1) = z \Rightarrow A = 1/3, B = 2/3$. Vi har alltså den betydligt enklare funktionen

$$f(z) = \frac{1/3}{z+1} + \frac{2/3}{z-2} \tag{4}$$

4.3 Skriv om till standardpotensserie

Vi tittar på $\frac{1}{z+1}$ och $\frac{1}{z-2}$ för sig. Med lite trick kan man skriva om båda till geometriska summor som har en standardutveckling (se formelsamling) $\sum x^k$. Det gäller alltså att hitta vad x är. För den första har vi

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{1-(-z)} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \tag{5}$$

För den andra har vi

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{-2(1-\frac{z}{2})} = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^k z^k \tag{6}$$

Detta ger oss svaret

$$f(z) = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \left((-1)^k - \frac{1}{2^k} \right) z^k \tag{7}$$

För att få $f^{(10)}(0)$ kan vi använda $c_k = f^{(k)}/k!$ och bara sätta in $k = 10$. Svaret blir

$$\frac{1}{3} \left((-1)^{10} - \frac{1}{2^{10}} \right) 10! = \frac{341}{1024} 10! \tag{8}$$

4.4 Derivering

En alternativ metod som (kanske) alltid funkar är att försöka se ett mönster i derivatorna. Jag gör bara för $g(z) = \frac{1}{z-2}$:

$$f^{(1)} = \frac{-1}{(z-2)^2} \tag{9}$$

$$f^{(2)} = \frac{2}{(z-2)^3} \tag{10}$$

$$f^{(3)} = \frac{-6}{(z-2)^4} \tag{11}$$

$$f^{(k)} = \frac{(-1)^k k!}{(z-2)^{k+1}} \tag{12}$$

För $z = 0$ får vi istället

$$f^{(k)}(0) = \frac{(-1)^k k!}{(-2)^{k+1}} = -\frac{1}{2} \frac{k!}{(2)^k} \tag{13}$$

Glöm inte att man ska dela med $k!$ för att få c_k, alltså får vi samma resultat som tidigare metod.

4.5 Konvergensradie

$f(z)$ har singulariteter i $z = -1$ och $z = 2$. Den singularitet som ligger närmst origo är -1, varför konvergensradien blir 1. Därför divergerar serien för $z = 1 + i$, som ju ligger utanför denna radie.

Ibland får man inte funktionen given utan bara en potensserie. Då kan man använda rot- eller kvottest för att se för vilka z funktionen konvergerar. Med exemplet

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (z-1)^{2k}}{k3^k} \tag{14}$$

Rottestet säger att serien (som är centrerad i $z = 1$) konvergerar för

$$\left(\mid \frac{(-1)^k (z-1)^{2k}}{k3^k} \mid \right)^{1/k} < 1 \tag{15}$$

$$\mid \frac{(z-1)^2}{k^{1/k}3} \mid < 1 \tag{16}$$

$$\mid z - 1 \mid < \sqrt{3} \tag{17}$$

Eftersom $k^{\frac{1}{k}}$ går mot 1. Därmed blir konvergensradien $\sqrt{3}$ från punkten z = 1.

5 Analytiska och harmoniska funktioner

5.1 Exempeluppgift

Bestäm alla analytiska funktioner $f(z)$ med realdelen $u(x, y) = x^2 + \alpha x^2 y^2 + \beta y^2$ uttryckta i variabeln z.

5.2 Lösning

Använd Cauchy-Riemann's villkor. Börja med att hitta $u_x' = 2x + 2\alpha xy^2$ och integrera den med avseende på y för att få $v(x, y) = 2xy + \frac{2}{3}\alpha xy^3 + \phi(y)$. Derivera denna med avseende på x för att få $v_x' = 2y + \frac{2}{3}\alpha y^3$ och jämför med $u_y' = 2\alpha x^2 y + 2\beta y$. Vi ser att $\alpha = 0$ och $\beta = -1$ och $\phi(y) = C$. Alltså är

$$f(x, y) = x^2 - y^2 + 2xyi + iC \tag{18}$$

Med identitetssatsen får vi

$$f(z, 0) = z^2 + iC \tag{19}$$

6 Fourierserier

6.1 Exempeluppgift

Funktionen f har fourierserien $c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kt}{k^4+1}$. Vilken är grafen till f? Vad är integralen $\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin 4t dt$?

6.2 Identifiera grafer

1. Grafen är jämn $\Leftrightarrow$ Det finns bara cosinustermer (som beror på t)

2. Grafen är udda $\Leftrightarrow$ Det finns bara sinustermer (som beror på t)

   Detta stämmer för exempeluppgiften, alltså är grafen udda

3. Grafen är varken udda eller jämn $\Leftrightarrow$ Det finns både sinus- och cosinustermer som beror på t

4. Grafen är kontinuerlig (hackig) $\Leftrightarrow$ Fourierkoefficienten $\leq \frac{C}{k^2}$. $\Leftrightarrow$ Fourierserien konvergerar likformigt.

   Glöm inte att rita fortsättningen på grafen för att se om den är kontinuerlig över flera perioder.

5. Grafen är deriverbar (smooth) $\Leftrightarrow$ Fourierkoefficienten $\leq \frac{C}{k^3}$ $\Leftrightarrow$ Fourierserien kan deriveras termvis.

   Båda dessa påståenden (5 och 6) stämmer för exempeluppgiften, alltså är grafen smooth.

6. Grafen har perioden T $\Leftrightarrow$ Ω är $2\pi/T$.

   Till exemplet vill vi hitta en graf med period 2π.

6.3 Beräkna integral

Se exempeluppgiften. Från formelsamlingen har vi att $\frac{2}{T} \int_p \sin k\Omega t f(t) dt = b_k$. Om vi flyttar runt lite och identifierar $k = 4$ kan vi hitta $b_4 \cdot \pi$ enkelt genom insättning:

$$\pi b_4 = \frac{1}{k^4+1} = \frac{\pi}{257} \tag{20}$$

7 Residykalkyl

7.1 Exempeluppgift

Låt $f(z) = \frac{e^{2iz}}{(z^2+9)^2}$. Bestäm singulariteter och beräkna integralen $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2+9)^2} dx$.

7.2 Singulariteter

Det finns två olika sorters singulariteter: poler och hävbara singulariteter. Skillnaden mellan dem är att man kan definiera funktionsvärdet i en punkt med en hävbar singularitet och göra funktionen kontinuerlig. Om vi t.ex. har $\frac{x}{\sin x}$ så är den inte definierad i $x = 0$, men vi kan göra funktionen kontinuerlig genom att definiera $f(0) = 1$. Detta kan vi inte göra med funktionen $\frac{1}{\sin x}$, eftersom den går mot oändligheten när vi närmar oss 0. D.v.s. om både täljare och nämnare går mot 0 i en odefinierad punkt kan man vanligtvis (?) häva singulariteten.

Utöver detta kan singulariteter vara enkla eller dubbla osv. Om vi har $\frac{1}{x}$ har den en enkel pol medan $\frac{1}{x^2}$ har en dubbel.

Man hittar alltså singulariteter genom att hitta när funktionen är odefinierad, t.ex. då nämnaren blir 0. Exempeluppgiften kan man skriva om till

$$f(z) = \frac{e^{2iz}}{((z+3i)(z-3i))^2} = \frac{e^{2iz}}{(z+3i)^2(z-3i)^2} \tag{21}$$

Det framgår att funktionen har dubbla singulariteter i $z = \pm 3i$. Det kan vara bra att känna till att $\ln 0$ och $tan \frac{\pi}{2}$ ej är definierade.

7.3 Residyregel 1

Kolla formelsamlingen för att se hur den ser ut. Denna kan man använda på exempeluppgiften. Man behöver räkna ut olika residyer för varje singularitet. Man börjar med att definiera vad som är $g(z)$ och vilken multiplicitet, d.v.s. N, som singulariteten har. För $z = 3i$ har vi:

$$\frac{e^{2iz}}{(z+3i)^2}(z-3i)^2 \tag{22}$$

N är alltså 2 och $g(z) = \frac{e^{2iz}}{(z+3i)^2}$. Enligt formelsamlingen behöver vi alltså derivera denna en gång och dividera med 2!, och stoppa in $z = 3i$.

$$g'(z) = \frac{2ie^{2iz}}{(z+3i)^2} - \frac{2e^{2iz}}{(z+3i)^3} = \frac{2i(z+3i)e^{2iz} - 2e^{2iz}}{(z+3i)^3} \tag{23}$$

$$\frac{g'(3i)}{2!} = \frac{1}{2}\frac{2i(6i)e^{-6} - 2e^{-6}}{(6i)^3} = -\frac{7ie^{-6}}{108} \tag{24}$$

Motsvarande lösning för $z = -3i$ blir $-\frac{5ie^6}{108}$.

7.4 Residyregel 2

Denna kan man använda om det går att skriva om $g(z)$ till en potensserie, men det verkar inte komma på tentorna särskilt ofta så jag skiter i det.

7.5 Residyregel 3

Vi kan inte använda exempeluppgiften för att visa residyregel 3, så vi tar $f(z) = \frac{\cos z}{z^2+1}$ som har enkla poler i $z = \pm i$. Nedan är uträkningen för $z = i$. Multiplicera med $(z - i)$:

$$\frac{\cos z}{(z-i)(z+i)}(z-i) = \frac{\cos z}{z+i} \tag{25}$$

$$Res_{z=i}\frac{\cos z}{z+i} = \frac{\cos i}{2i} = \frac{e^{-1}+e^{1}}{4i} \tag{26}$$

7.6 Residyregel 4

Vi använder föregående exempel och deriverar nämnaren:

$$Res_{z=i}\frac{\cos z}{z^2+1} = \frac{\cos z}{2z} = \frac{\cos i}{2i} = \frac{e^{-1}+e^{1}}{4i} \tag{27}$$

7.7 Integraler

I exempeluppgiften skulle man beräkna $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2+9)^2} dx$, men denna är skitsvår att beräkna, så vi använder residykalkyl istället. För att kunna använda residysatsen behöver vi en enkel sluten kurva som inte går genom singulariteterna. Cauchy's integralsats säger att integralen över detta område är 0 om vi tar med de negativt orienterade kurvintegralerna runt de singulära punkterna, d.v.s. i vårt fall

$$0 = \int_{\delta\Omega} f(x)dx = \int_{\gamma} f(x)dx + 2\pi i(Res_{z=-3i}(f) + Res_{z=3i}(f)) \tag{28}$$

Där γ är den enkla slutna kurvan vi behöver. Det vi hoppas kunna göra är att hitta en sådan sluten kurva som innehåller det tänkta integrationsområdet $(-\infty, \infty)$ och andra kurvor som är lätta att beräkna. Om vi tar en halvcirkel med radien $R \to \infty$ i övre halvplanet kommer integralen över halvcirkeln gå mot 0 och då kommer integralen längs den reella axeln vara lika med Residytermerna i ekvation 26. Först kollar vi så att singulariteterna inte ligger på den kurva vi har valt, och eftersom dessa är $z = \pm 3i$ är detta lugnt. Eftersom vi bara är i övre halvplanet behöver vi dessutom bara bry oss om $z = 3i$. Nu behöver vi visa att integralen över halvcirkeln går mot 0 då r går mot ∞. Detta görs med ML-olikhet:

$$\left|\int_{C^+} f(z)dz\right| \leq \frac{2\pi R \cdot C}{2} max\,|f(z)| \tag{29}$$

Här är C^+ den positivt orienterade halvcirkeln som har längden $2\pi R/2$. e^{it} kommer från att vi går runt cirkeln. Maxvärdet för funktionen fås då $z \to R$. Vi sätter in:

$$\pi R \cdot max\,|f(z)| = \pi R \left|\frac{\cos 2R \cdot C}{(R^2+9)^2}\right| \to 0 \tag{30}$$

Integralen går därmed också mot 0 när $R \to \infty$. Därför kan vi dra slutsatsen att

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2+9)^2} dx = 2\pi i Res_{z=3i}(f) = 2\pi i(-\frac{7ie^{-6}}{108}) = \frac{7\pi e^{-6}}{54} \tag{31}$$

Med den tidigare uträknade residyn för $z = 3i$. (Obs! egentligen stämmer inte ovanstående argument för att integralen över halvcirkeln är 0, men man kan lösa det genom att byta funktion och skriva om $\cos(2x)$ till e^{2iz}. Men det hade blivit så mycket att skriva. Om man inte har någon aning om hur man ska visa att halvcirkelintegralen blir 0 kan man säga att den blir det enligt Jordans lemma. Om man har tur räcker det.)

I exempeluppgiften skulle vi integrera längs hela den reella axeln. Om man istället har bara den positiva delen kan man antingen använda sig av en hel cirkel eller en kvartscirkel. Om funktionen har en singularitet i origo behöver man skapa en liten (del)cirkel där också, och visa att integralen över den går mot 0 då z går mot 0.

8 Resttermsuppskattning

8.1 Exempeluppgift

Ge (en någorlunda god) uppskattning av resttermen då $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3+1}$ approximeras med termerna 1 till 20. (Alltså uppskatta $r_{20} = \sum_{k=21}^{\infty} \frac{1}{k^3+1}$)

8.2 Leibniz

Om serien uppfyller Leibniz krav på alternerade serier kan man uppskatta resttermen med $\mid a_n \mid$ där n är n är den efterföljande termen man summerar upp till. Nu kan man inte använda detta för exempeluppgiften men OM man hade kunnat det så hade man bara tagit $\mid a_{21} \mid$, d.v.s. $\frac{1}{21^3+1} = \frac{1}{9262}$.

8.3 Integral

Hitta en funktion som är större än a_k $\forall$ k och integrera den från sista termen man summerar upp till. Till exempeluppgiften passar $\int \frac{1}{k^3}$ från 20 till $\infty = [-\frac{1}{2k^2}]_{20}^{\infty} = \frac{1}{800}$.

9 Ekvationslösning

9.1 Exempeluppgift

Lös $\tan z = 2i$

9.2 Lösning

Skriv om $\tan z$ till $\frac{\sin z}{\cos z}$. Skriv sedan om sinus och cosinus till exponenter och arrangera om:

$$\frac{\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}}{\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}} = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{i(e^{iz}+e^{-iz})} = 2i \tag{32}$$

Multiplicera upp nämnaren

$$e^{iz} - e^{-iz} = -2(e^{iz} - e^{-iz}) \tag{33}$$

Multiplicera med e^{iz}

$$e^{2iz} - 1 = -2e^{2iz} + 2 \Rightarrow e^{2iz} = -\frac{1}{3} \tag{34}$$

Skriv om till exponent

$$e^{2iz} = e^{Log(-1/3)} = e^{-\ln 3 + \pi i(1+2k)} \tag{35}$$

Svaret blir

$$z = \pi(\frac{1}{2} + k) + i\frac{\ln 3}{2} \tag{36}$$

$\therefore$ Utnyttja trigonometriska och exponentiella omskrivningar och multiplicera med e^{iz}