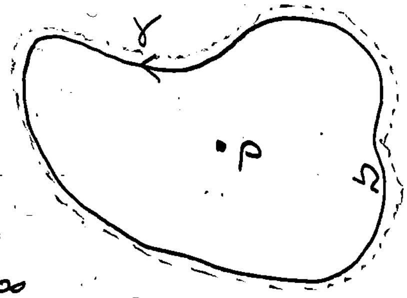
Föreläsning 6

29 januari

Cauchys integralformeln

$$f(p) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-p}\,dz$$

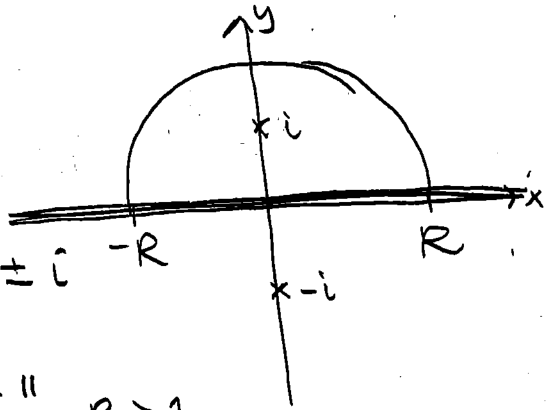


$\Omega \in \mathbb{C}$

enkelt sammanhängande = skär inte sig själv

Ex. 3.28

Beräkna $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx \left(= [\arctan x]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi \right)$



$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(z+i)(z-i)}$$

så $\frac{1}{1+z^2}$ har enkelpoler $z = \pm i$

Låter γ vara "$[-R,R] + C_R^+$", $R > 1$

Då är, enligt Cauchys integralformel,

$$\int_\gamma \frac{1}{1+z^2}\,dz = \int_\gamma \frac{\frac{1}{z+i}}{z-i}\,dz = 2\pi i \cdot \frac{1}{z+i}\Big|_{z=i} = \pi$$

$\frac{1}{z+i}$ — holomorf på Ω

Men

$$\pi = \int_\gamma \frac{1}{1+z^2}\,dz = \int_{-R}^{R} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_{C_R^+} \frac{1}{1+z^2}\,dz$$

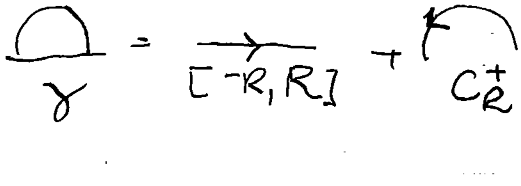
på x-axeln

endast bågen

Visa att $\displaystyle\int_{C_R^+} \frac{1}{1+z^2}\,dz \to 0$ då $R \to +\infty$

ALLTSÅ endast bågen

Då följer att $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \pi$



Vi använder ML-olikheten

$$\left| \int_\Gamma f(z)\,dz \right| \leq \underbrace{\max|f|}_{M} \cdot \underbrace{\ell(\Gamma)}_{L}$$

Vi måste uppskatta $\left| \frac{1}{1+z^2} \right|$ på C_R^+, dvs då $|z| = R$

(Vi vet att $\ell(C_R^+) = \pi R$)

Polynomuppskattningen vi hade ger: $\left| \frac{1}{1+z^2} \right| \leq \frac{2}{|z|^2} = \frac{2}{R^2}$

då $|z| = R$ tillräckligt stor.

Vi får $\left| \int_{C_R^+} \frac{1}{1+z^2}\,dz \right| \leq \frac{2}{R^{\cancel{2}}} \cdot \pi \cancel{R} = \frac{2\pi}{R}$

Så $\int_{C_R^+} \frac{1}{1+z^2}\,dz \to 0$ då $R \to +\infty$

Följder av Cauchys integralformel

$$f(p) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-p}\,dz$$

Kan vi derivera med avseende på p? Blir i så fall

$$f'(p) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-p)^2}\,dz \;?$$

Sats 3.30

Ja, $f'(p) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-p)^2}\,dz$

Bevisidé:

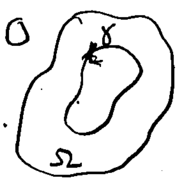
- Visa $\left| \frac{f(p+h)-f(p)}{h} - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-p)^2}\,dz \right| \to 0$ då $h \to 0$

- Cauchys integralformel säger att

$$f(p+h) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-(p+h)}\,dz \quad f(p) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-p}\,dz$$

Sats 3.32 - Moreras sats

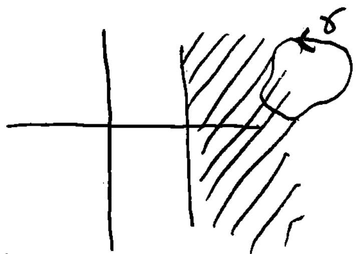
Om f är kontinuerlig på $\Omega \subset \mathbb{C}$ och $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ för alla slutna kurvor γ i Ω så är f holomorf på Ω.



- Ex. jmf. 3.33

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\,dt, \quad \mathrm{Re}\,z > 1$$

garanterar att integralen är konvergent



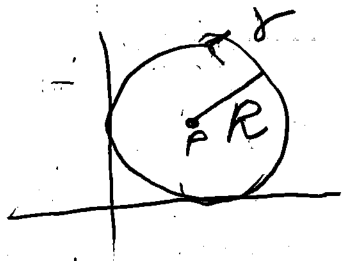
- $$\int_\gamma \Gamma(z)\,dz = \int_\gamma \left[\int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\,dt\right] dz \overset{\text{Fubini}}{=} \int_0^\infty \underbrace{\left[\int_\gamma t^{z-1}\,dz\right]}_{=0} e^{-t}\,dt = 0$$

Sats (3.34) Liouvilles sats

Antag att f är holomorf på $\mathbb{C}$ (dvs hel) och att f är begränsad. Då är f konstant.

Bevis: Anta att $|f| \le M$ "f begränsad av konstanten M".

Låt $p \in \mathbb{C}$ vara godtycklig, $R > 0$



$$f'(p) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-p)^2}\, dz$$

ML-olikheten ger: $|f'(p)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-p|=R} \frac{f(z)}{(z-p)^2} dz \right| \le \underbrace{\frac{1}{\cancel{2\pi}} \cdot \frac{M}{R^{\cancel{2}}}}_{\text{Begränsning av integrand}} \cdot \underbrace{\cancel{2\pi} \cancel{R}}_{\text{Längd av } \gamma} =$

Låt $R \to \infty$. Det ger $f'(p) = 0$.

"Desto större cirklar vi tar desto mindre blir derivatan"

Efterson p var godtycklig följer att M är konstant.

Sats 3.35, Algebrans fundamentalsats

Antag att p är ett polynom som saknar nollställe i $\mathbb{C}$. Då är p konstant.

Bevis

Antag att p är ett polynom utan nollställen

Låt $f(z) = \frac{1}{p(z)}$. f holomorf på $\mathbb{C}$

Vi ska visa att f är begränsad.

$p(z) = a_d z^d + a_{d-1} z^{d-1} + \dots$

Finns $\rho > 0$ så att $|p(z)| > \frac{1}{2}|a_d||z|^d > \frac{1}{2}|a_d|\rho^d$ om $|z| > \rho$

Alltså är $|f(z)| = \frac{1}{|p(z)|} < \frac{2}{|a_d|\rho^d}$ då $|z| > \rho$

f holomorf $\Rightarrow$ f kontinuerlig och antar därför max/min på $|z| \leq \rho$.

Speciellt är $|f|$ begränsad på $|z| \leq \rho$.

Alltså är f begränsad och därmed konstant enligt Liouvilles sats.

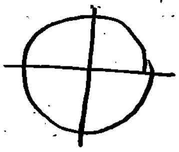
Men $p(z) = \frac{1}{f(z)}$ så p konstant.

$f(z) = e^z$. saknar nollställe. $(1 = e^{z-z} = e^z \cdot e^{-z}$

Sats 3.36 Picards lilla sats

f icke-konstant, hel. Då finns lösning till $f(z) = a$ för alla $a \in \mathbb{C}$ utom högst ett undantag.

Ex. Beräkna $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{2-\cos t}\,dt$

Låt $z = e^{it}$  Det ger en kurvintegral över

$|z| = 1$

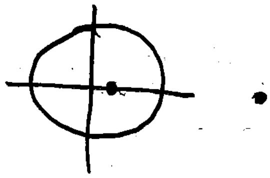
$$dz = i e^{it} dt = iz\,dt \Rightarrow dt = \frac{1}{iz} dz$$

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \frac{z + \frac{1}{z}}{2}$$

Vi får: $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{2-\cos t}\,dt = \int_{|z|=1} \frac{1}{2 - \frac{z+\frac{1}{z}}{2}} \cdot \frac{1}{iz}\,dz =$

$$= -i \int_{|z|=1} \frac{2}{4z - z^2 - 1}\,dz = i \int_{|z|=1} \frac{2}{z^2 - 4z + 1}\,dz = i \int_{|z|=1} \frac{\overbrace{\left(\frac{2i}{(z-(2+\sqrt{3}))}\right)}^{=f(z)}}{(z-(2-\sqrt{3}))}\,dz \quad \text{fort}$$

$$(z-2)^2 - 3 = 0$$
$$z = 2 \pm \sqrt{3}$$



$f(z) = \dfrac{2i}{z-(3+\sqrt{3})}$ holomorf i $|z| \leq 1$.

$$\text{fort} = \int_{|z|=1?} \frac{f(z)}{z - \underbrace{(2-\sqrt{3})}_{p}}\,dz = 2\pi i\, f(\underbrace{2-\sqrt{3}}_{p}) = 2\pi i \frac{2i}{(2-\sqrt{3})-(2+\sqrt{3})} =$$

Cauchys integralformel

$$= \frac{-4\pi}{-2\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$