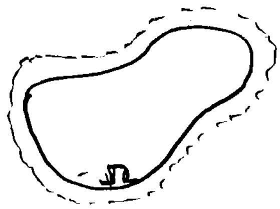
Föreläsning 5 27 januari

Cauchys integralsats



Funktion f som är holomorf på (en omgivning av) Ω.

Låt Ω vara ett område i $\mathbb{C}$

Då är $\displaystyle\int_{\partial\Omega} f(z)\,dz = 0$

Antas pos. orienterad styckvis slät

spelar egentligen ingen roll då integralen $= 0$.

Bevis

Korta sättet: Vi antar att $f' = u + iv$ (där $u, v \in C^1$) "fusk"

Villkoret är egentligen alltid uppfyllt om holomorf

Tillåter oss att använda Greens formel.

$$\int_{\partial\Omega} f(z)\,dz = \int_{\partial\Omega} (u(x,y) + iv(x,y))(dx + i\,dy) =$$

$z = x + iy$
$dz = dx + i\,dy$

$$= \int_{\partial\Omega} (u\,dx - v\,dy) + i\int_{\partial\Omega} (v\,dx + u\,dy)$$

"Två reella kurvintegraler à flerdim"

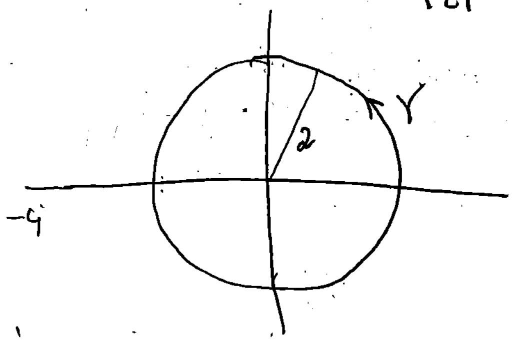
Greens formel

$$\overset{\text{Greens formel}}{=} \iint_{\Omega} \overbrace{(-v_x' - u_y')}^{0}\,dx\,dy + i\iint_{\Omega} \overbrace{(u_x' - v_y')}^{0}\,dx\,dy$$

$$\left[\int_{\partial\Omega} P\,dx + Q\,dy = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\right]$$

$= 0$ VSV.

Ex. Beräkna $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{\sin z}{(z+4)e^{z}}\,dz$

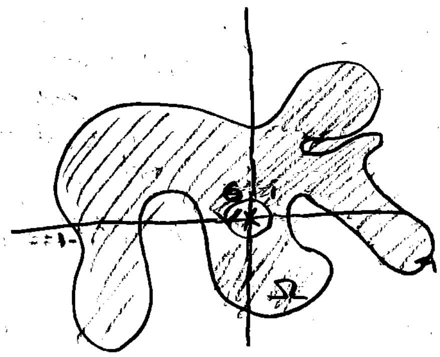


Integralen holomorf utom i $z=-4$.

Cauchys ger direkt

$\int = 0$

Ex.



Beräkna $\displaystyle\int_{\gamma} \frac{1}{z}\,dz$

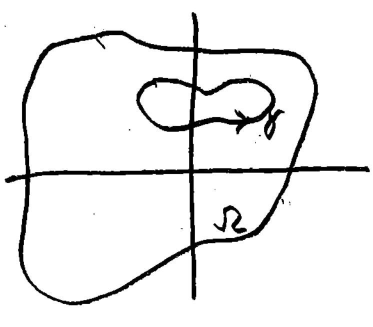
Holomorf överallt bortsett från noll.
noll ligger dock inom kurvan. PROBLEM

$$\partial\Omega = \gamma - \sigma$$

OBS! att $f(z) = \frac{1}{z}$ är holomorf på en omgivning av Ω!
Cauchys integralsats ger:

$$0 = \int_{\partial\Omega} \frac{1}{z}\,dz = \int_{\gamma} \frac{1}{z}\,dz - \underbrace{\int_{|z|=1} \frac{1}{z}\,dz}_{=2\pi i} \quad \text{dvs} \int_{\gamma} \frac{1}{z}\,dz = 2\pi i$$

Obs: Om f är holomorf på Ω, och Ω är enkelt sammanhängande. Så visar Cauchys integralformel att $\int_{\gamma} f(z)\,dz = 0$ för alla slutna kurvor γ i Ω, dvs f har en primitiv!



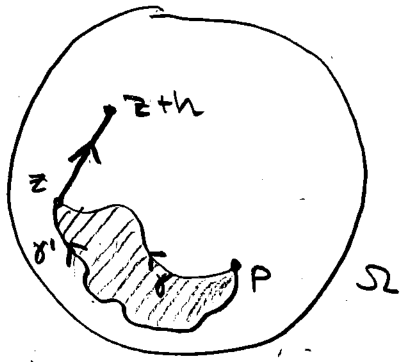
När gör det att hitta en primitiv funktion?

<u>Sats</u>: Anta att f är kontinuerlig på Ω.

Om $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ för <u>alla</u> slutna kurvor i Ω

så har f en primitiv.

Bevisidé:



Fixera någon punkt $p \in \Omega$

Def. $F(z) = \int_\gamma f(z)\,dz$ där γ går från p till z

γ och γ' bildar en sluten kurva om vi fixar orienteringen.

$z+h$ kan ligga utanför då $h \to 0$

Oberoende av valet av γ (tack vare antagandet)

$$F'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_z^{z+h} f(\xi)\,d(\xi)$$

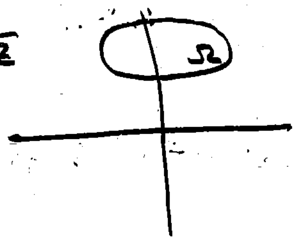
Integralen längst räta linjen

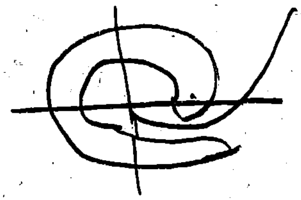
$$\left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| = \left| \frac{1}{h} \int_z^{z+h} f(\xi)\,d(\xi) - \underbrace{\frac{1}{h} \int_z^{z+h} f(z)\,d\xi}_{f(z)} \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{h} \int_z^{z+h} (f(\xi) - f(z))\,d\xi \right| \underset{\text{ML-olikhet}}{\leq} \Big(\frac{1}{|h|} \underbrace{\max_{\text{Linjen}} |f(\xi) - f(z)|}_{M} \Big) \cdot \underbrace{|h|}_{L}$$

$\to$ eftersom f kontinuerlig

Obs: Om f är holomorf på Ω, och Ω är enkelt sammanhängande visar Cauchys integralformel att $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ för alla slutna kurvor γ i Ω, dvs. f har en primitiv!

$\frac{1}{z}$  Log A
$\mathrm{Log}_{-\pi}$

 ingen log funktion
kring kurva

När går det att hitta harmoniska konjugat?

Sats: Anta att u är harmonisk (C^2) på ett enkelt och sammanhängande område Ω. Då finns v så att $f = u + iv$ är holomorf

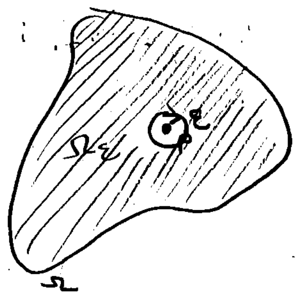
B: steg 1: Sätt $g(z) = u_x' - i u_y'$
steg 2: Visa att g är holomorf!
steg 3: Låt G vara en primitiv till g, $G = U + iV$
steg 4: Visa att $U = u$

Nästa konsekvens: Cauchys integralformeln

Låt Ω vara ett område i $\mathbb{C}$ (med styckvis slät rand) och låt $p \in \Omega$. Om f är holomorf på (en omgivning av) Ω så är

$$f(p) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{z-p}\,dz$$

TÄNK!
Mellanrumde i endim hitta funktion om vi vet ändpunkterna
 Finns ju oändligt många



Låt $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \{z : |z-p| \le \varepsilon\}$

Då är $\frac{f(z)}{z-p}$ holomorf på Ω_ε.

Cauchys integralsats ger

$$0 = \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{f(z)}{z-p}\,dz = \int_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{z-p}\,dz - \underbrace{\int_{|z-p|=\varepsilon} \frac{f(z)}{z-p}\,dz}_{\text{Vill beräkna för att få ursprungliga.}}$$

- $$\int_{|z-p|=\varepsilon} \frac{f(z)}{z-p}\,dz = \int_{|z-p|=\varepsilon} \frac{f(z)-f(p)+f(p)}{z-p}\,dz =$$

- $$= \underbrace{\int_{|z-p|=\varepsilon} \frac{f(z)-f(p)}{z-p}\,dz}_{I_1} + \underbrace{\int_{|z-p|=\varepsilon} \frac{f(p)}{z-p}\,dz}_{I_2}$$

I_2: $$f(p)\int_{|z-p|=\varepsilon} \frac{1}{z-p}\,dz \underset{\substack{z=e^{it}\cdot\varepsilon+p \\ 0\le t\le 2\pi}}{=} f(p)\int_0^{2\pi} \frac{1}{\cancel{\varepsilon e^{it}}}\cdot\cancel{\varepsilon}\, i\, \cancel{e^{it}}\,dt = 2\pi i f(p)$$

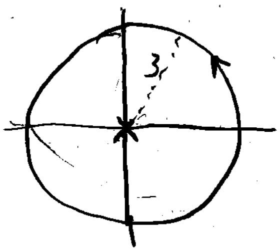
- I_1: Vill visa att $I_1 \to 0$ då $\varepsilon \to 0$

- $$\left|\int_{|z-p|=\varepsilon} \frac{f(z)-f(p)}{z-p}\,dz\right| \le \left(\max_{|z-p|=\varepsilon}\left|\frac{f(z)-f(p)}{z-p}\right|\right)\cdot \overbrace{2\pi\varepsilon}^{\lambda} =$$

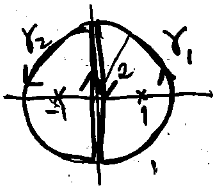
$$= \frac{1}{\cancel{\varepsilon}} \underbrace{\max_{|z-p|=\varepsilon}|f(z)-f(p)|}_{\substack{\text{då } \varepsilon\to 0 \text{ går } \max \to 0 \\ \text{pga kontinuitet}}} \cdot 2\pi\cancel{\varepsilon}$$

Sätt ihop: $$\int_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{z-p}\,dz = 2\pi i f(p)$$

Ex $\displaystyle\int_{|z|=3} \frac{e^z \cos z}{z}\, dz = \int_{|z|=3} \frac{\overbrace{e^z \cos z}^{f(z)}}{z-0} = 2\pi i f(p) = 2\pi i f(0) = 2\pi i$



Ex. $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2-1}\, dz$



Alt. 1 Integrera över halva cirkeln $\times 2$ γ_1 och γ_2.

-1 ligger utanför den röda kurvan

$$\int_{\gamma_1} \frac{e^z}{\underbrace{z^2-1}_{(z-1)(z+1)}}\, dz = \int_{\gamma_1} \frac{\frac{e^z}{z+1}}{z-1}\, dz = 2\pi i \left.\frac{e^z}{z+1}\right|_{z=1} = 2\pi i \cdot \frac{e}{2}$$

GÖR KLART!