FÖRELÄSNING 18 — 26 Februari

Kapitel 10 - Residykalkyler

Cauchys integralformel

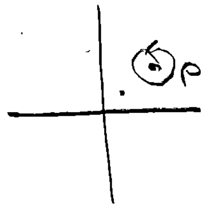
$$\int_\gamma \frac{g(z)}{z-p}\,dz = i2\pi\, g(p),$$

$$\int_\gamma \frac{g(z)}{(z-p)^n}\,dz = i2\pi \frac{g^{(n-1)}(p)}{(n-1)!}$$

$f(z) = \dfrac{g(z)}{z-p}$ har isolerad singularitet i $z=p$.

Def (10.1)

Antag att f har en isolerad singularitet i $z=p$.
Vi definerar då residyn av f i $z=p$ som

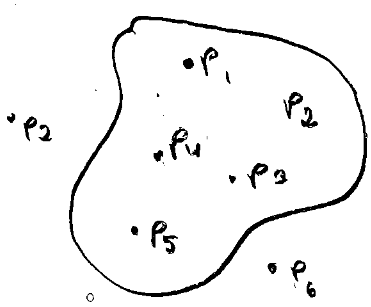


$$\underset{z=p}{\mathrm{Res}}(f) = \frac{1}{i2\pi}\int_\gamma f(z)\,dz$$

där γ är enkel, sluten och positivt orienterad, (slät) kurva som omsluter p, men ingen annan singularitet för f.

Vi kommer att skaffa ett behändigt sätt att hantera flera poler.

Sats (10.2)

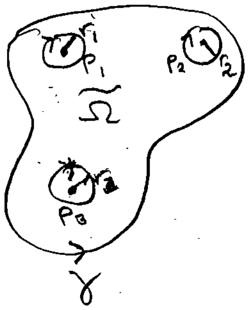


$$\int_\gamma f(z)\,dz = i2\pi \sum_{p_k} \underset{z=p_k}{\mathrm{Res}}(f)$$

"p_k innanför γ"

Om f är holomorf utanför $\{p_k\}$ och inget p_k ligger på γ.

Bevis: (3 punkter)



$\tilde{\Omega}$: innanför γ, utanför

Cauchys integralsats:

$$0 = \int_{\partial\tilde{\Omega}} f(z)\,dz = \int_{\gamma} f(z)\,dz - \sum_{k=1}^{3} \int_{|z-p_k|=r_k} f(z)\,dz$$

så $\displaystyle\int_{\gamma} f(z)\,dz = i2\pi \sum_{k=1}^{3} \operatorname*{Res}_{z=p_k}(f)$

Sats (10.3 - 10.6, Residy-regler)

1) Om f har en pol av ordning (högst) N i $z=p$ $\left(f(z)=\dfrac{g(z)}{(z-p)^N}\right)$ så är $\displaystyle\operatorname*{Res}_{z=p}(f) = \frac{1}{(N-1)!}\lim_{z\to p}\frac{d^{N-1}}{dz^{N-1}}\left((z-p)^N f(z)\right)$

2) $\displaystyle g(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k (z-p)^k \Rightarrow \operatorname*{Res}_{z=p}\frac{g(z)}{(z-p)^N} = c_{N-1}$

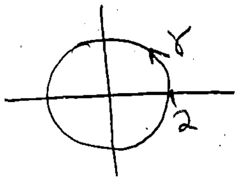
3) f har en enkelpol i $z=p \Rightarrow \displaystyle\operatorname*{Res}_{z=p}(f) = \lim_{z\to p}(z-p)f(z)$

4) f, g holomorfa i omgivningen av $z=p$ och $f(p)\neq 0$, $g(p)=0$.
g enkelt nollställe i $z=p$ (så $g'(p)\neq 0$). Då är

$$\operatorname*{Res}_{z=p}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f(p)}{g'(p)}$$

Ex (jfr 10.8)

Låt $\gamma = |z| = 2$



Då är

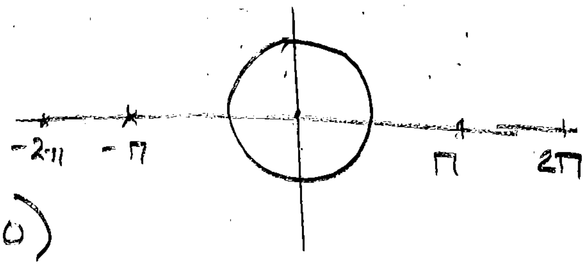
1) $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{\sin z}\,dz = i2\pi \operatorname*{Res}_{z=0}\left(\frac{1}{\sin z}\right) \overset{(3)}{=} i2\pi \lim_{z\to 0}\frac{z}{\sin z} = i2\pi$

$\left\{\begin{array}{l} \text{ty } f(z) = \dfrac{1}{\sin z} \text{ har enkel pol i } z=0 \\ \dfrac{1}{\sin z} = \dfrac{1}{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots} = \dfrac{1}{z\left(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots\right)} \end{array}\right.$

2) $\displaystyle\int_\gamma \frac{z}{z^4-1}\,dz = i2\pi\left[\operatorname*{Res}_{z=1}\left(\frac{z}{z^4-1}\right) + \operatorname*{Res}_{z=i}\left(\frac{z}{z^4-1}\right) + \operatorname*{Res}_{z=-1}\left(\frac{z}{z^4-1}\right) + \operatorname*{Res}_{z=-i}\left(\frac{z}{z^4-1}\right)\right]$

$= i2\pi\left[\frac{1}{4\cdot 1^3} + \frac{i}{4i^3} + \frac{-1}{4\cdot(-1)^3} + \frac{-i}{4\cdot(-i)^3}\right] = i2\pi\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) = 0$

3) $\int_\gamma \frac{1}{\sin z \cdot z^2} dz$ H är pol av ordning 3 i $z=0$. Inga andra poler innanför γ.



Residy mha (1): $(N=3, p=0)$

$$\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{1}{z^2 \sin z} = \frac{1}{2} \lim_{z \to 0} \frac{d^2}{dz^2} \frac{z}{\sin z} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{z\to 0} \frac{z \sin z - 2(\sin z - z\cos z)\cos z}{\sin^3 z} = \dots = \frac{1}{6}$$

<u>Påminnelse</u> $f(z) = \frac{f(0)}{0!} + \frac{f'(0)}{1!} z + \frac{f''(0)}{2!} z^2 + \dots$

Idé: Serieutveckla $\frac{z}{\sin z}$ och plocka koefficienten framför z?

$$\frac{z}{\sin z} = \frac{z}{z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \dots} = \frac{1}{1 - \frac{z^2}{6} + \frac{z^4}{120} - \dots} = \frac{1}{1 - \left(\frac{z^2}{6} - \frac{z^4}{120} + \dots\right)} \quad (*)$$

"Om z är tillräckligt litet så kommer $\left(\frac{z^2}{6} - \frac{z^4}{120} + \dots\right)$ vara mindre än 1, blir som en $\overset{\text{res av en}}{\text{geometrisk summa}}$"

$$= 1 + \left(\frac{z^2}{6} - \frac{z^4}{120} + \dots\right) + \left(\frac{z^2}{6} - \frac{z^4}{120} + \dots\right)^2 + \dots =$$

$$= 1 + \frac{z^2}{6} + \dots$$

pga att $\frac{f''(0)}{2!}$

Så $\left.\frac{d^2}{dz^2} \frac{z}{\sin z}\right|_{z=0} = 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

$$\boxed{(*) \ \frac{z}{\sin z} = \frac{z}{z - \frac{z^3}{6} + z^5 (B(z))} = \frac{1}{1 - \frac{z^2}{6} + z^4 B(z)}}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{1}{z^2 \sin z} = \frac{1}{6}$$

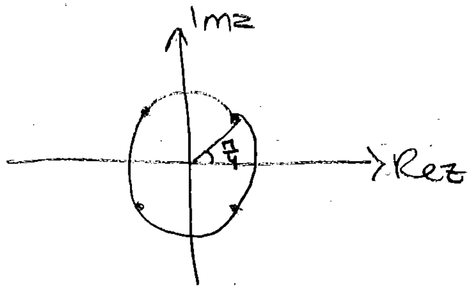
Så $\int_\gamma \frac{1}{z^2 \sin z} dz = i 2\pi \cdot \frac{1}{6} = i \frac{\pi}{3}$

Ex. Beräkna $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^4}\,dx$

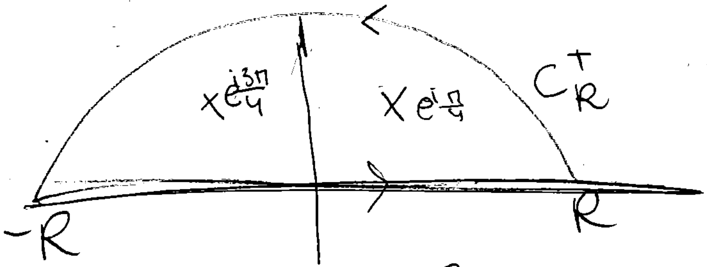
Def $f(z) = \frac{1}{1+z^4}$. f har poler då $z^4 = -1$

f har poler $p_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}$, $p_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}}$

$p_3 = e^{i\frac{5\pi}{4}}$, $p_4 = e^{i\frac{7\pi}{4}}$



$\frac{1}{\sqrt{2}}(\pm 1 \pm i)$



Två poler inuti

Residysatsen: $\displaystyle\int_{-R}^{R} \frac{1}{1+x^4}\,dx + \underbrace{\int_{C_R^+} \frac{1}{1+z^4}\,dz}_{\to 0 \text{ då } R \to +\infty} =$

$= i2\pi \left(\operatorname*{Res}_{z=p_1}\left(\frac{1}{1+z^4}\right) + \operatorname*{Res}_{z=p_2}\left(\frac{1}{1+z^4}\right) \right)$

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^4}\,dx = i2\pi \left[\operatorname*{Res}_{z=p_1} \frac{1}{1+z^4} + \operatorname*{Res}_{z=p_2} \frac{1}{1+z^4} \right] =$

$\left(\frac{1}{1+z^4} = \frac{1}{(z-p_1)(z-p_2)(z-p_3)(z-p_4)} \right)$ $\boxed{\begin{array}{l} f = 1 \\ g = 1+z^4 \end{array}}$

$= i2\pi \left[\frac{1}{4p_1^3} + \frac{1}{4p_2^3} \right] = i2\pi \left[\frac{p_1}{4\underbrace{(p_1^4)}_{=-1}} + \frac{p_2}{4\underbrace{(p_2^4)}_{=-1}} \right] = -\frac{i\pi}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) + \frac{1}{\sqrt{2}}\right.$

$= -\frac{i\pi}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\sqrt{2}}\, i = \boxed{\frac{\pi}{\sqrt{2}}}$

$\boxed{\text{Exempel 10.9}}$ $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{3+\cos^2\theta}\,d\theta$ $z = e^{i\theta}$ $\displaystyle\int_{|z|=1}$ rationell funktion