Föreläsning 17

24 Februari

Nollställen och singulariteter

Sats 8.18

Antag att f är holomorf på Ω och $\alpha \in \Omega$ och $f(\alpha) = 0$. Då kan man skriva $f(z) = (z-\alpha)g(z)$ där g är holomorf på Ω.

Bevis

$g(z) = \dfrac{f(z)}{z-\alpha}$, $z \neq \alpha$ är uppenbarligen holomorf på $\Omega \setminus \{\alpha\}$

f holomorf på $\Omega \Rightarrow f$ har potensserieutveckling kring $z = \alpha$.

$$f(z) = a_0 + a_1(z-\alpha) + a_2(z-\alpha)^2 + \dots$$

Om $0 = f(z) = a_0 + a_1(z-\alpha) + a_2(z-\alpha) + \dots = a_0$

$$f(z) = a_1(z-\alpha) + a_2(z-\alpha)^2 + a_3(z-\alpha)^3 + \dots$$

Bryter ut $(z-\alpha)$

$$= (z-\alpha)\underbrace{(a_1 + a_2(z-\alpha) + a_3(z-\alpha)^2 + \dots)}_{g(z)}$$

g har en potensserieutveckling kring $z = \alpha$ och är därmed holomorf i $z = \alpha$

Denna g stämmer överrens med $g(z) = \dfrac{f(z)}{z-\alpha}$ så vi har en holomorf funktion g på hela Ω.

Def. 8.19

Om det går att skriva $f(z) = (z-\alpha)^m g(z)$ med g holomorf men inte $f(z) = (z-\alpha)^{m+1} h(z)$ med h holomorf så säger vi att f har nollställe av ordningen m i α.

Ex. $f(z) = (z-1)^2(z+7)$ Nollställe av ordning 2 i $z=1$ och ordning 1 i $z=-7$

Ex. Funktionen $f(z) = \sin z$ har ett nollställe av ordning 1 i $z=0$.

Vi skriver $f(z) = \sin z = \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots\right) =$

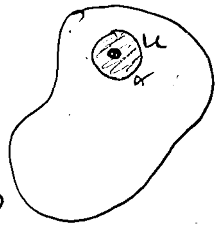
$$= z \underbrace{\left(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots\right)}_{g(z),\ g(0)=1 \neq 0}$$ kan inte bryta ut fler z

Ex. Funktionen $\frac{\sin z}{z}$ ser ut att ha en singularitet för $z=0$. Men man kan utvidga/tolka $\frac{\sin z}{z}$ som g i föregående exempel.

Vi säger att singulariteten i $z=0$ är hävbar.

Sats 8.20

Antag att f är holomorf på Ω och att $f(\alpha)=0$, $\alpha \in \Omega$. Antingen är $f(z)=0$ för alla z i Ω, eller så finns en öppen omgivning u av α sådan att $f(z)\neq 0$ i $u \setminus \{\alpha\}$



Bevis

Antag $f \neq 0$. Då kan inte $f^{(k)}(\alpha)=0$ för alla k. (enligt sats från igår)

Skriver vi f i en potensserie kring α så gäller

$$f(z) = f(\alpha) + \frac{f'(\alpha)}{1!}(z-\alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(z-\alpha)^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}(z-\alpha$$

Låt N vara det första tal för vilket $f^{(k)}(\alpha) \neq$, dvs antag $f(\alpha)=0$, $f'(\alpha)=0$ $f''(\alpha)=0, \dots, f^{(N-1)}(\alpha)=0$, $f^{(N)}(\alpha)\neq 0$

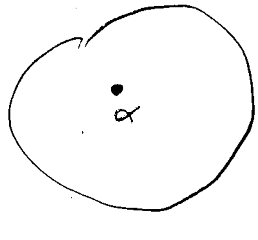
Vi får $$f(z) = \frac{f^{(N)}(\alpha)}{N!}(z-\alpha)^N + \frac{f^{(N+1)}(\alpha)}{(N+1)!}(z-\alpha)^{N+1} + \dots$$

$$= (z-\alpha)^N\left(\frac{f^N(\alpha)}{N!} + \frac{f^{(N+1)}(\alpha)}{(N+1)!}(z-\alpha) + \dots\right) = (z-\alpha)^N g(z)$$

Enda chansen att $f(z)=0$ är således då

$(z-\alpha)^N = 0$ eller $g(z)=0$

$(z-\alpha)^N = 0 \iff \underline{z=\alpha}$



Men $g(\alpha) = \dfrac{f^{(N)}(\alpha)}{N!} \neq 0$

Då $g(z)$ är holomorf och därmed kontinuerlig och därmed nollskild i en omgivning av $z=\alpha$.

Så $f \neq 0$ i en omgivning i $u\setminus\{\alpha\}$ där u omgivning av α.

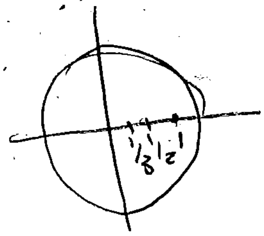
"Säger att alla nollställen till en holomorf funktion är isolerade"

Ex. 8.21

Antag att f är en holomorf funktion (på $\mathbb{C}$) sådan att

$f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^2}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Visa att $f(z) = z^2$

"Det räcker att känna till en funktion på en väldigt liten mängd för att känna till den"



Låt $g(z) = f(z) - z^2$. Då är $g(\frac{1}{n}) = f(\frac{1}{n}) - \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2}$

Dessutom ger kontinuiteten att

$$g(0) = \lim_{n \to +\infty} g(\frac{1}{n}) = \lim_{n \to +\infty} 0 = 0$$

"Kontinuitet ger att vi dessutom har noll i nollan"

Så $z = 0$ är nollställe till holomorfa g.

Varje omgivning till $z = 0$ innehåller något (oändligt många) $\frac{1}{n}$.

Så $z = 0$ ej isolerat nollställe till g, enligt sats 8.20.

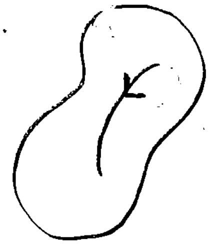
Så $g(z) = 0$, och alltså $\boxed{f(z) = z^2}$

Sats 8.22

Antag att f och g är holomorfa på $\Omega \subset \mathbb{C}$

Om $E = \{z \in \Omega;\ f(z) = g(z)\}$ har en hopningspunkt i Ω så är $f(z) = g(z)$ för alla $z \in \Omega$

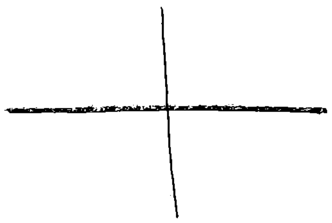
Ex.



"Hopningspunkt är en punkt som har många punkter i sin direkta omgivning. Punkter har således hopat sig."

Ex 8.23

Antag att f är holomorf på $\mathbb{C}$ (hel) och att $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$



Då är $f(z) = e^z$ för alla $z \in \mathbb{C}$

Kapitel 9 - Singularitet

Def 9.1

Vi säger att f har en isolerad singularitet i $z = \alpha$ om f är holomorf i $U \setminus \{\alpha\}$ där U är någon omgivning av α.

Ex. $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ har isolerade singulariteter i $z = \pm i$.

Def 9.3

Antag att f har isolerad singularitet i $z = \alpha$

1) Om $|f|$ är begränsad i $U \setminus \{\alpha\}$ för någon omgivning U av α så säger vi att singulariteten är hävbar.

Ex. $\frac{\sin z}{z}$ har hävbar singularitet i $z = 0$

2, Om $\lim_{\alpha \to +\infty} |f(z)| = +\infty$ så säger vi att

f har en pol i $z = \alpha$.

Ex. $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ har poler i $z = \pm i$

3) I andra fall säger vi att f har en väsentlig singularitet i $z = \alpha$

Ex. $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$, $z = 0$

Sats 9.4

Om f har en hävbar singularitet så existerar gränsvärdet $\lim_{z \to \alpha} f(z)$ och kan utvidgas till att vara holomorf i $z = \alpha$

Ex. 95

Visa att $f(z) = \frac{(e^z - 1)^2}{z \sin z}$ har en hävbar singularitet i $z = 0$

$\frac{e^z - 1}{z} \to 1$, $z \to 0$, $\frac{\sin z}{z} \to 1$, $z \to 0$

$$f(z) = \underbrace{\frac{e^z - 1}{z}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{e^z - 1}{z}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{z}{\sin z}}_{\to 1} \to 1 \text{ då } z \to 0$$

alternativt

$$\frac{e^z - 1}{z} = \frac{(1 + z + \frac{z^2}{2} + \ldots) - 1}{z} = 1 + \frac{z}{2} + \ldots \to 1 \text{ då } z \to 0$$

Sats 9.7

Antag att f har en pol i $z=\alpha$. Då finns ett positivt heltal m sådant att $f(z)=\frac{g(z)}{(z-\alpha)^m}$ där g är holomorf i omgivning av α och $g(\alpha)\neq 0$.

Talet m kallas polens ordning.

Bevisidé: Betrakta funktionen $h(z)=\frac{1}{f(z)}$. f har singularitet i α $\Rightarrow$ h har nollställe i α.

$$h(z)=(z-\alpha)^m\cdot \tilde g(z),\quad \tilde g(\alpha)\neq 0,\ \tilde g \text{ holomorf},$$

$$f(z)=\frac{1}{(z-\alpha)^m \tilde g(z)}=\frac{\frac{1}{\tilde g(z)}}{(z-\alpha)^m}$$

$$g(z)=\frac{1}{\tilde g(z)} \Rightarrow \frac{g(z)}{(z-\alpha)^m}$$

Ex 8.28

Vi vill lösa Hermites diffekvation:

$y''(t)-2ty'(t)+\lambda y(t)=0$ där λ är konstant.

Man hoppas att kunna skriva

$$y(t)=\sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k \quad \text{med positiv konvergensradie}$$

Vi kan i.s.f derivera, och $y'(t)=\sum_{k=0}^{+\infty} a_k k t^{k-1}$,

$$y''(t)=\sum_{k=0}^{+\infty} a_k k(k-1)t^{k-2} \overset{l=k-2}{=} \sum_{l=-2}^{+\infty} a_{l+2}(l+2)(l+1)t^l$$

$$y''(t)=\sum_{k=0}^{+\infty} a_{k+2}(k+2)(k+1)t^k$$

$$0=y''(t)-2ty'(t)+\lambda y(t)=\sum_{k=0}^{+\infty}\left[a_{k+2}(k+2)(k+1)t^k-2a_k k t^k+\lambda a_k t^k\right]$$

$$=\sum_{k=0}^{+\infty}\left((k+2)(k+1)a_{k+2}-2a_k k+\lambda a_k\right)t^k$$

För varje k skall $(k+2)(k+1)a_{k+2}+(\lambda-2k)a_k=0$

Detta är en rekursionsekv. Kan lösas, givet a_0 och a_1

$a_0=y(0)$, $a_1=y'(0)$