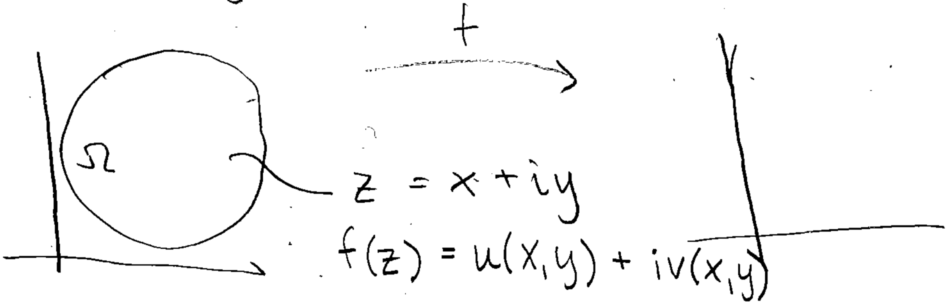
Föreläsning 1 19 Januari



$z = x + iy$

$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$

Ex. $f(z) = z^2$ $\quad u(x,y) = x^2 - y^2 \quad v(x,y) = 2xy$

> **Def (1.1)**
> f som ovan definerad i omgivning av a (a är en punkt i Ω)
> Vi säger att f har gränsvärdet L då z går mot a om det till varje $\varepsilon > 0$ finns ett $\delta > 0$ så att
> $$0 < |z - a| < \delta \Rightarrow |f(z) - L| < \varepsilon$$

Ex. 1.2

$f(z) = z^2 \quad a \in \mathbb{C} \quad$ Visa $\lim_{z \to a} z^2 = a^2$

Triangelolikheten
$|z + w| \leq |z| + |w|$

Låt $\varepsilon > 0$ vara givet. $|z^2 - a^2| < \varepsilon$

$$|z^2 - a^2| = |(z-a)(z+a)| = \underbrace{|z-a|}_{\leq \delta}|z - a + 2a| \leq \delta(\underbrace{|z-a|}_{\leq \delta < 1} + 2|a|)$$

← vi väljer

$$\leq \delta(1 + 2|a|) < \varepsilon \quad \text{om } \delta < \frac{\varepsilon}{1 + 2|a|}$$

$(\delta < 1)$

Om $0 < |z-a| < \delta$ och $\delta < \min\left(1, \frac{\varepsilon}{1+2|a|}\right)$ så $|z^2 - a^2| < \varepsilon$

Ex. 1.4

$\lim_{z \to 0} \frac{\bar{z}}{z}$ existerar ej

För att gränsvärdet skulle existera måste det gå mot samma värde. T.ex. Im-del och Re-

Def:
f kontinuerlig i a om $\lim_{z \to a} f(z) = f(a)$

Var är $z \mapsto \frac{\bar{z}}{z}$ kontinuerlig?

Def
Antag att f är definerad i en omgivning av a. Då är f (komplext) deriverbar om gränsvärdet

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} \text{ existerar.}$$

Komplexa h, inte bara +/-

Vi skriver $f'(a)$

En deriverbar funktion är kontinuerlig.

Def. Om f är komplext deriverbar på Ω så säger vi att f är holomorf på Ω

Ex. 1.11

$f : z \to z^3$ är holomorf i hela $\mathbb{C}$

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{3z^2h + 3zh^2 + h^3}{h} = 3z^2 + 3zh + h^2 \to 3z^2 \text{ då } h \to 0$$

Ex. 1.12
$f : z \to \bar{z}$ är inte (komplext) deriverbar någonstans

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{\overline{z+h} - \bar{z}}{h} = \frac{\cancel{\bar{z}} + \bar{h} - \cancel{\bar{z}}}{h} = \frac{\bar{h}}{h}$$ vars gränsvärde ej existerar då $h \to 0$

$\bar{z} = \overline{x+iy} = x - iy$, $u(x,y) = x$, $v(x,y) = -y$

Sats 1.13

Låt $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $a = \alpha + i\beta$

Antag att $f'(a)$ existerar. Då är

$$\begin{cases} u'_x(\alpha,\beta) = v'_y(\alpha,\beta) \\ u'_y(\alpha,\beta) = -v'_x(\alpha,\beta) \end{cases}$$ Cauchy-Riemanns ekvationer

Ex. $f(z) = z^2$ $\quad u(x,y) = x^2 - y^2$ $\quad u'_x = 2x = v'_y$
$\quad v(x,y) = 2xy$ $\quad u'_y = -2y = -v'_x$

Bevis

Vi vet att gränsvärdet

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \text{ existerar}$$

Speciellt existerar gränsvärdet då h är rent reell/imaginär

h reell $h = t$, t = reell

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{f(a+t) - f(a)}{t} = \frac{f(\alpha + t + i\beta) - f(\alpha + i\beta)}{t} =$$

$$= \frac{u(\alpha+t,\beta) + iv(\alpha+t,\beta) - (u(\alpha,\beta) + iv(\alpha,\beta))}{t} =$$

$$= \frac{u(\alpha+t,\beta) - u(\alpha,\beta)}{t} + i\,\frac{v(\alpha+t,\beta) - v(\alpha,\beta)}{t}$$

$$\longrightarrow u'_x(\alpha,\beta) + iv'_x(\alpha,\beta) \text{ då } t \to 0$$

<u>h helt imaginär</u>: $h = it$, t reell

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{f(a+it) - f(a)}{it} = \frac{f(a+it) - f(a)}{it} \quad \frac{1}{i} = -i$$

$$= \frac{i\,(f(a) - f(a+it))}{t} = i \cdot \frac{f(\alpha + i\beta) - f(\alpha + i(\beta+t))}{t} =$$

$$= \frac{i\,(u(\alpha,\beta) + iv(\alpha,\beta) - u(\alpha,\beta+t) - iv(\alpha,\beta+t))}{t} =$$

$$= \frac{v(\alpha, \beta+t) - v(\alpha,\beta)}{t} - i\,\frac{u(\alpha,\beta+t) - u(\alpha,\beta)}{t}$$

$$\to v_y'(\alpha,\beta) - i u_y'(\alpha,\beta) \quad \text{då } t \to 0$$

Då vi vet att gränsvärdet existerar måste detta gälla

slutsats:
$$\left.\begin{aligned} u_x'(\alpha,\beta) &= v_y'(\alpha,\beta) \\ v_x'(\alpha,\beta) &= -u_y'(\alpha,\beta) \end{aligned}\right\} \text{CR-ekvation}$$

VSB

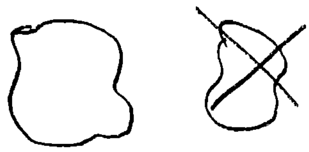
Korollarium (följdsats)

f, u och v som i satsen

$$f'(a) = u_x'(\alpha,\beta) + i v_x'(\alpha,\beta) = u_x'(\alpha,\beta) - i u_y'(\alpha,\beta) = v_y'(\alpha,\beta) + i v_x'(\alpha,\beta)$$

Korollarium

$f'(z) \equiv 0$ i Ω så är f konstant i Ω
↑Konstant



Ω sammanhängande

$$\begin{cases} \text{ty grad } u = (u_x', u_y') \equiv \bar{0} \Rightarrow u \text{ konstant} \\ \text{och grad } v = (v_x', v_y') \equiv \bar{0} \Rightarrow v \text{ konstant} \end{cases}$$

$f = u + iv$ konstant

Sats. 1.15

Om $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ och u och v är differentierbara i punkten $a = \alpha + i\beta$ och u och v uppfyller CR-ekvationerna i a så är f deriverbar i a.

Bevis

h, k vara reella

$f(a+h+ik) - f(a) \approx (h+ik)A$ + mindre termer

$f(a+h+ik) - f(a) = u(\alpha+h, \beta+k) + iv(\alpha+h, \beta+k) - u(\alpha,\beta) - iv(\alpha,\beta)$

$= u(\alpha+h, \beta+k) - u(\alpha,\beta) + i(v(\alpha+h, \beta+k) - v(\alpha,\beta))$

pga differentiering $= h \cdot u_x'(\alpha,\beta) + k \underbrace{u_y'}_{=-v_x'}(\alpha,\beta) + \sqrt{h^2+k^2} \cdot E_1(h,k)$ $\to 0$ då $(h,k)\to 0$

$+ i(hv_x'(\alpha,\beta) + k\underbrace{v_y'}_{= u_x}(\alpha,\beta)) + \sqrt{h^2+k^2}\, E_2(h,k)$

pga villkor CR-ekv.

$ih - k = i(h+ik)$

$= (h+ik)\left(u_x'(\alpha,\beta) + iv_x'(\alpha,\beta)\right) + \sqrt{h^2+k^2} \cdot E(h,k)$

$\to 0$ då $(h,k)\to 0$

$$\Rightarrow \frac{f(a+h+ik) - f(a)}{h+ik} = u_x'(\alpha,\beta) + iv_x'(\alpha,\beta)$$