

Kap 2. Elektroner som partikel

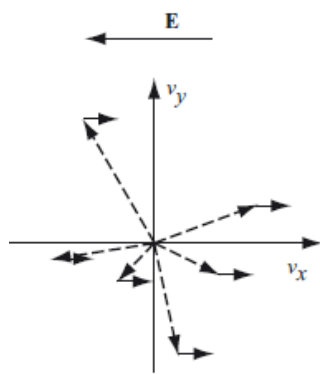
2.1 ström, spridning och diffusion

Antar elektronerna som en klassisk gas. I denna model har elektronerna endast kinetisk energi (termisk)

$$\bar{E} = \frac{3}{2}kT = \frac{1}{2}mv_{th}^2$$

Där v_{th} är elektronens fart. Varje frihetsgrad bidrar med $\frac{1}{2}kT$ i energi.

I termisk jämvikt är medelvärdet av elektronens fart $\mathbf{v} = 0$ då den rör sig slumpmässigt lika mycket åt alla håll. Om ett elektriskt fält läggs på fås en liten komponent av de slumpmässiga hastighetsvektorerna i



denna riktning, en drifhastighet v_d . För att strömmen inte ska öka obegränsat med det elektriska fältet måste elektronerna bromsas, detta sker genom spridning.

Elektronerna kan kollidera med jonerna och förlora energi.

Strömen från elektronernas drifhastighet blir
 $\mathbf{J} = n(-e)\mathbf{v}_d$

Mobiliteten anger absolutbeloppet av förhållandet mellan drifhastighet och det elektriska fältet.

Det finns även en diffusionsström från höga koncentrationer till låga som ges av $J_e = eD_e \frac{dn}{dx}$ för elektroner.

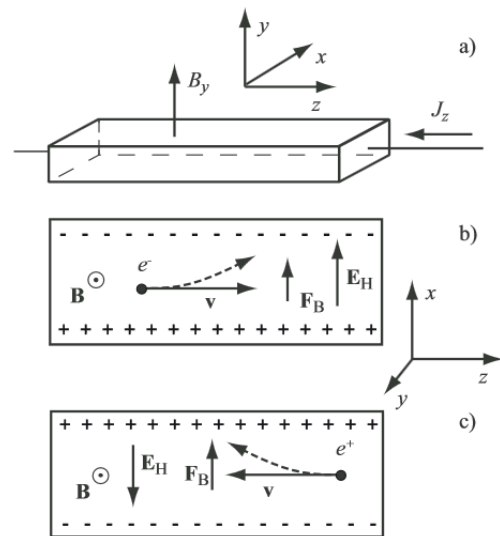
Totala strömmen blir då (för elektroner)

$$\mathbf{J}_e = n(-e)\mathbf{v}_d + eD_e \frac{dn}{dx}$$

2.2 Halleffekt

Ett prov placerat i ett magnetfält kommer få sina laddningsbärare påverkade av Lorentz

kraften. Laddningsbärare kommer separeras och en spänning kommer uppstå, en så kallad **Hallspänning**. Kraften från magnetfältet blir på



en elektron $F_B = -e(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = ev_d B$ (enl figur). **Laddningsbärare separeras tills jämvikt nås** $F_B = eE_H$ (de rör sig dock fort i z-led) och

$$E_H = \frac{F_B}{e} = v_d B \text{ med } J = -env_d \text{ fås}$$

$$E_H = \frac{J}{ne} B = \frac{I}{Ane} B$$

Som är hallfältet, hallspänningen fås genom att multiplicera fältet med provets tjocklek.

$$U_H = E_H \cdot b$$

Genom att mäta U_H som funktion av ett varierande magnetfält kan man få fram elektroner/hål koncentrationen n/p

2.3 Värmekapacitet

Def.

$$C_V \left(\frac{\partial \bar{E}}{\partial T} \right)_V$$

En elektrons energibidrag är $\bar{E} = \frac{3}{2}kT$ och för n stycken blir då bidraget till C_V

$$C_V^{el} = n \frac{3}{2} k$$

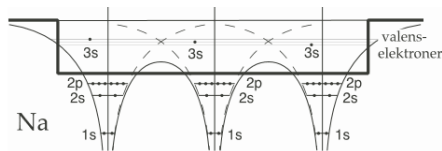
Och jonerna/atomerna bidrar med

$$C_V^{atom} = \frac{6}{2} Nk = 3Nk$$

i 3 dimensioner. Experimentellt visar det sig dock att $C_V^{el} \sim 0$ och endast jonerna bidrar.

Kap 4. Frielektronmodellen

Vi approximerar potentialen med en lådpotential enligt figuren.



I 3-D definieras varje tillstånd av (k_x, k_y, k_z) och energierna ges av

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2 (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)}{2m}$$

Och tillsammans med spinnet så ger detta ett entydigt tillstånd.

Ovan nämnda lösning beskriver stående vågor, för att modellera rörelsen av elektroner inför vi planvågor istället $\phi(\mathbf{r}) \sim e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ som har samma energi som innan. Skillnaden är att vågfunktionen $\phi(\mathbf{r})$ är egenfunktion till rörelsemängdsoperatoren

$$\mathbf{p}\phi = \hbar\mathbf{k}\phi$$

Och vi kan skriva energin som

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{p^2}{2m}$$

Nu inför vi även periodiska randvillkor så att vi inte får "reflektioner" vid vägarna utan vågen "fortsätter" att gå. Nu kommer vågvektorns komponenter $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ även anta negativa värden. Energierna bli samma som innan.

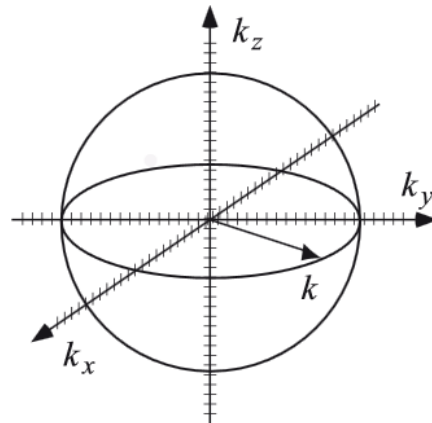
4.5 Tillståndstäthet

Tillståndstätheten är definierad som antalet tillstånd per energiintervall

$$Z(E) = \frac{dS(E)}{dE}$$

I k-rummet innebär varje $\mathbf{k}$ 2 olika tillstånd med hänsyn till spinnet. Avståndet till origo, dvs k , bestämmer energin för tillstånden,

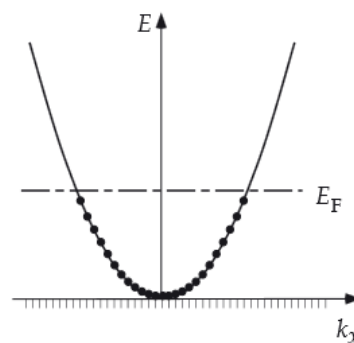
dessa tillstånd kan ses som ytan på en sfär med radien k .



Antalet tillstånd för en viss energi blir då sfärens volym (går 2 för spinn), $S(k) = 2 \frac{4\pi}{3} k^3$ men vi måste ta bort "tomrummet" mellan k-punkterna, vi har en k-vektor per kub $\left(\frac{2\pi}{L}\right)^3$ därmed blir $S(k) = 2 \frac{L^3}{(2\pi)^3} \frac{4\pi}{3} k^3$.

Uttrycker man k i termer av E och deriverar fås $Z(E)$.

Fermienergin är den energin där det högst besatta tillståndet finns vid $T=0$.



Och denna ges av $E_F = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{3}{8\pi} n \right)^{2/3}$ genom att sätta antalet elektroner lika med antalet fyllda tillstånd

$$N = \int_0^{E_F} Z(E) dE$$

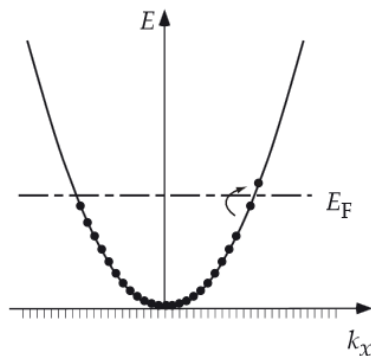
Farten hos en elektron vid fermienergin

$$\text{beräknas som } E_F = \frac{m}{2} v_F^2$$

4.6 Fermi-Dirac fördelning

Om $T > 0$ kan elektroner exciteras termiskt men endast de som ligger nära fermienergin eftersom de som ligger under inte har några lediga tillstånd inom några kT över sig. Detta gör också att systemet inte kan absorbera så mycket energi och är en förklaring till varför

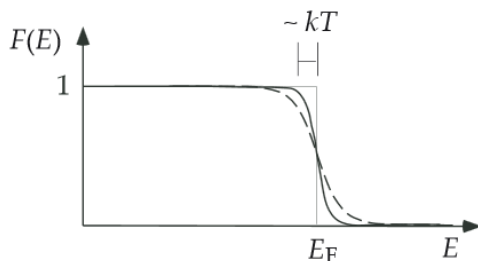
$$C_V^{el} = \frac{dE}{dT} \sim 0$$



Fermi-Dirac fördelningen

$$F(E) = \frac{1}{e^{(E-E_F)/kT} + 1}$$

Anger sannolikheten att ett tillstånd med energin E är besatt och tar hänsyn till pauli principen. E_F i uttrycket ovan är *Ferminivån* och är temperaturberoende.



Vid $T=0$ är detta en stegfunktion och för större T så "smetas" den ut mer. Inom några kT går $F(E)$ från 1 till 0.

4.7 Klassisk gräns hos en elektrongas

Så länge pauliprincipen är viktig så kan vi inte betrakta det klassiskt, så om $F(E) \ll 1$ för alla E som är tillåtna så spelar pauli inte så stor roll. Vi når alltså den klassiska gränsen då

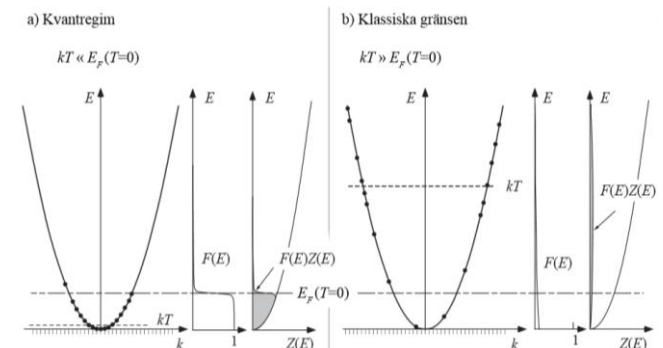
$$e^{E_F(T)/kT} \ll 1 \text{ eller då } e^{-\frac{E_F(T)}{kT}} \gg 1$$

Det gäller alltså att antingen så här elektronkoncentrationen n låg eller så är

temperaturen T hög. Man kan visa att för fermienergin måste det gälla att

$$E_F(T=0) \ll kT$$

För att kunna betrakta det klassiskt.



4.8 Värmekapacitet igen

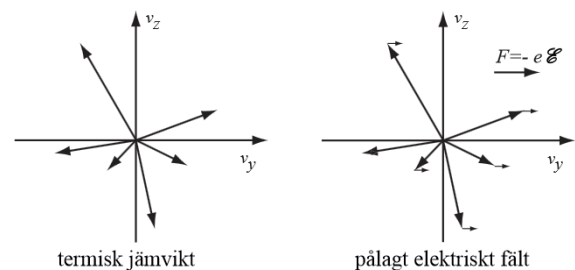
Om vi tar hänsyn till pauli principer och att endast elektroner några kT ifrån E_F kan exciteras så blir värmekapaciteten per elektron

$$C_V^{el} = \frac{\pi^2 k^2 T}{2 E_F}$$

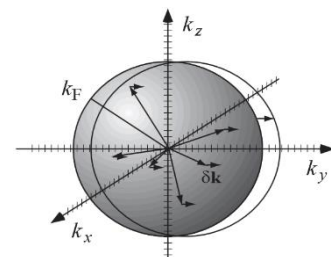
(vilket inte härleds) och bidraget från atomerna blir som tidigare

$$C_V^{atom} = 3N_{atom}k$$

4.9 Konduktivitet igen



Eftersom $\mathbf{p} = m\mathbf{v} = \hbar\mathbf{k}$ så ger en ändring i hastighet/rörelsemängd även en ändring i vågvektorn $\mathbf{k}$. Detta innebär att när ett elektriskt fält läggs på så förskjuts hela fermisfären i medel $\delta\mathbf{k}$ i kraftens riktning.



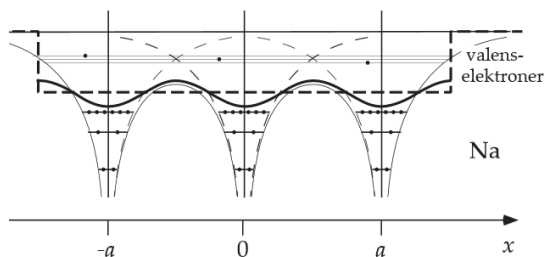
Fria medelvägen bestäms nu av $l = v_F \tau$
 istället för $l = v_{th} \tau$

Olika material har olika ledningsförmåga, både jonernas svängning (temperaturberoende) och orenheter i kristallen påverkar hur ofta spridning kan ske, dvs den fria medelvägen för elektronerna.

Kap 5. Bandstruktur

Nästan-frielektronmodellen

Istället för att approximera potentialen med en lådpotential så försöker vi nu ta hänsyn till det faktum att elektronerna faktiskt känner av



jonerna.

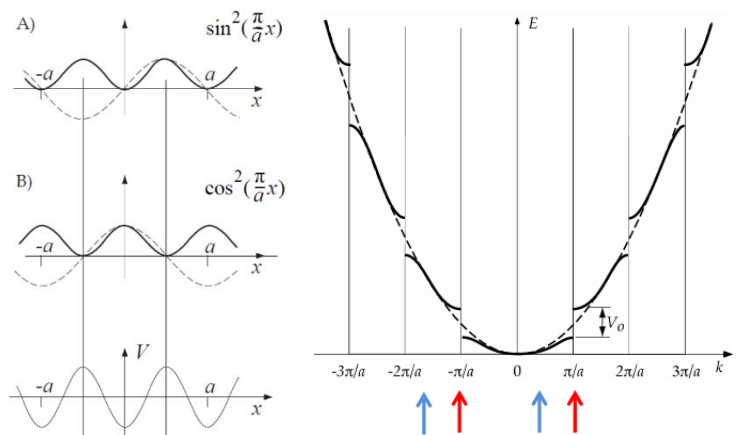
Denna potential är periodisk

$$V(x) = -V_0 \cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right)$$

Och vågfunktionerna måste vara mer än en planvåg pga. reflektion. När elektronen reflekteras vet vi inte längre vilket tillstånd den är i (då k vektorn ändrats) och den befinner sig i superposition mellan de två tillstånden. Vi får alltså en linjärkombination och med störningsräkning erhålls:

$$\Psi(x) = \frac{1}{(\sqrt{2L})} \left(e^{i\frac{\pi}{a}x} \pm e^{-i\frac{\pi}{a}x} \right) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \\ \sqrt{\frac{2}{L}} i \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \end{cases}$$

De olika vågfunktionerna har olika potentiell energi som syns i figuren, Den ena vågfunktionen har stor sannolikhetstäthet vid



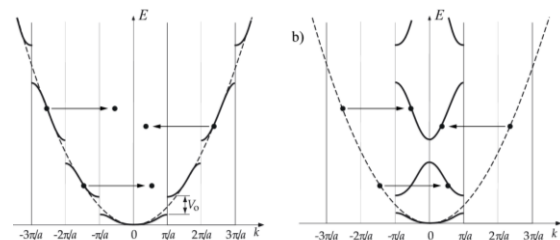
potentailens dalar och den andra vid dess toppar. Detta gör att elektron parabeln "bryts" vid dessa ställen, dvs för de k -värden som ges av braggvillkoret

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{a}n$$

Detta energigap är bandgapet, som blir V_0 stort.

Dessa vågfunktioner är inte längre egenfunktioner till $\mathbf{p}$ och $\mathbf{k}\hbar$ kan inte längre tolkas som rörelsemängd.

Eftersom potentialen är periodisk kan vi plotta allt inom Brillouinizonen ($-\frac{\pi}{a} < k \leq \frac{\pi}{a}$)



Figur 5.13: Vi kan välja att plotta energierna (i närvaro av den periodiska potentialen, heldragna linjer) så att de ligger nära fri-elektronparabeln (streckad linje) i figur (a) eller inom Brillouin-zonen (b). Pilarna indikerar vår procedur, dvs skifta alla energier sidledes med någon multipel av $2\pi/a$, för att samla bandstrukturen inom första Brillouin-zonen.

5.4 Rörelsekvationen för elektroner i en kristall

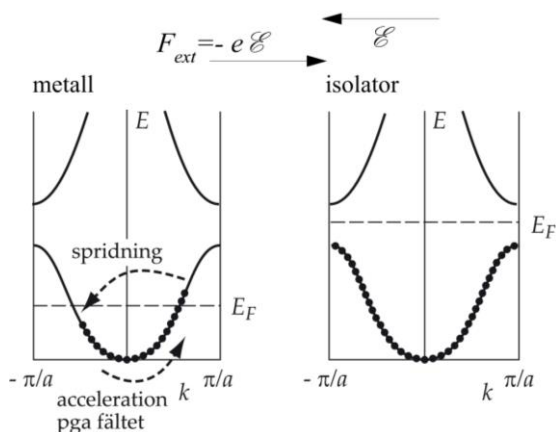
Vi låter ett vågpaket beskriva elektronen med en gruppshastighet $v_g = \frac{\hbar k}{m}$

Detta gäller i FEM men inte då vi har den periodiska potentialen eftersom $\hbar k$ inte här är rörelsemängd, kallas istället kristallrörelsemängd. Istället får man att

$$\hbar \frac{dk}{dt} = F_{ext} = -eE$$

kraften är nu delat i två delar, dels en yttre kraft som kommer från ett pålagt E-fält och dels den kraft som kommer från jonernas potential som redan har inkluderats.

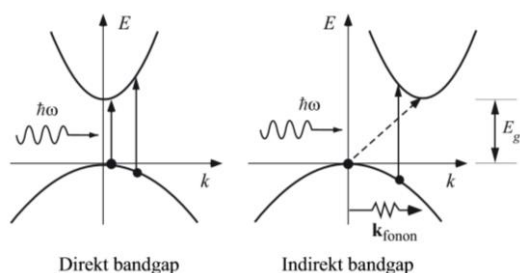
Lägger vi på ett yttre E-fält så ändrar alla elektronerna sin vågvektor i den yttre kraftens riktning. Detta ger en netto ström (metall) om bandet är delvis fullt men om bandet är helt fullt kan inga elektroner röra sig (isolator)



Tumregel

- **Udda** antal elektroner per atom → delvis fyllda band – *metall*
- *Isolator*, de lägsta banden är helt fulla, högre band helt tomma → **jämnt** antal elektroner per atom

Kapitel 6. Halvledare

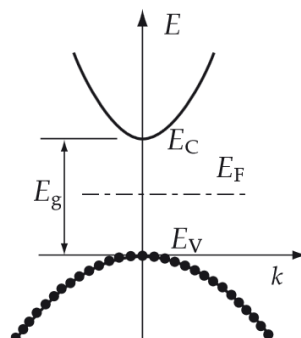


Direkt och indirekt bandgap. Indirekt bandgap kräver en ändring i k-värde (fonon) eller en väldigt energirik foton för att kunna göra en övergång medan direkt bandgap kräver enbart en foton med rätt energi.

- Foton – hög energi, lågt k
- Fonon – låg energi, högt k

Sannolikheten för en övergång i ett indirekt bandgap är mycket mindre.

Vid T=0 är Vb helt fullt och Cb helt tomt

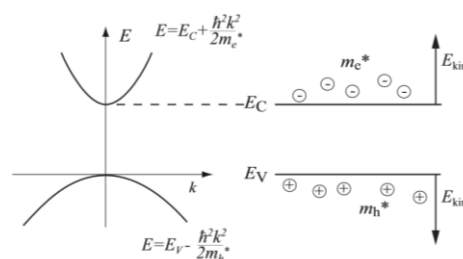


Taylorutvecklar man $E(k)$ kring energibandens extrempunkter kan man identifiera den *effektiva massan*

$$\frac{1}{m_e^*} = \frac{1}{\hbar^2} \frac{\partial^2 E}{\partial k^2}$$

Som kan användas för att anpassa en parabel efter energibandet.

Elektronens massa har inte ändrats, den bara beter sig som om så vore fallet när den påverkas av kristallens potential.

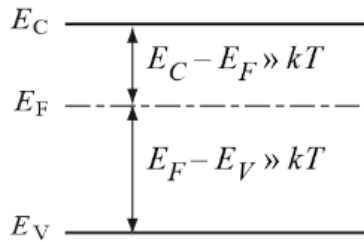


Figur 6.8: Hälens kinetiska energi ökar i den negativa E - axelns riktning, de bubblar gärna upp till toppen av valensbandet. Elektroner lägger sig gärna i botten av ledningsbandet.

6.4 Laddningsbärarkoncentrationer

En halvledares konduktivitet bestäms framförallt av laddningsbärarkoncentrationen.

Antaget att E_F inte ligger för nära kanterna, se bild



så ges koncentrationerna av

$$n = N_C e^{-(E_C - E_F)/kT}$$

$$p = N_V e^{-(E_F - E_V)/kT}$$

Produkten av dessa ger *massverkans lag*

$$n \cdot p = N_C N_V e^{-\frac{E_g}{kT}} = n_i^2$$

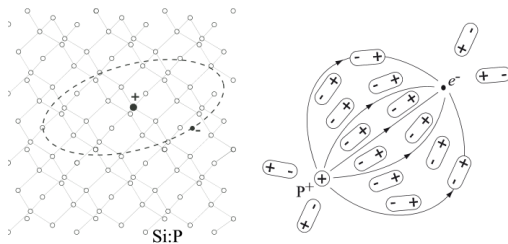
Som inte längre beror på E_F utan endast materialparametrar och temperaturen T .

En intrinsisk halvledare är väldigt ren och elektroner och hål uppstår endast genom excitation över bandgapet, dvs

$$n = p = n_i$$

6.7 dopning

Jonisationsenergin för en elektron bunden till en donator blir inte så stor som för en väteatom (13.6 eV) eftersom den skärmas då materialet polariseras, se bild.



Detta tar man hänsyn till genom att korrigera potentialen elektronen känner med ϵ_r

$$-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \text{väteatom}$$

$$-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \epsilon_r r} \quad \text{korrigerad}$$

Därmed blir då också den effektiva bohr radien större där man ersätter massan m med den

effektiva massan m^* och även korrigera med ϵ_r .

$$a_0^* = \frac{a_0 m \epsilon_r}{m^*}$$

E_D, E_A är donator och acceptorns energinivå medans E_d, E_a är deras jonisations energier.

T=0

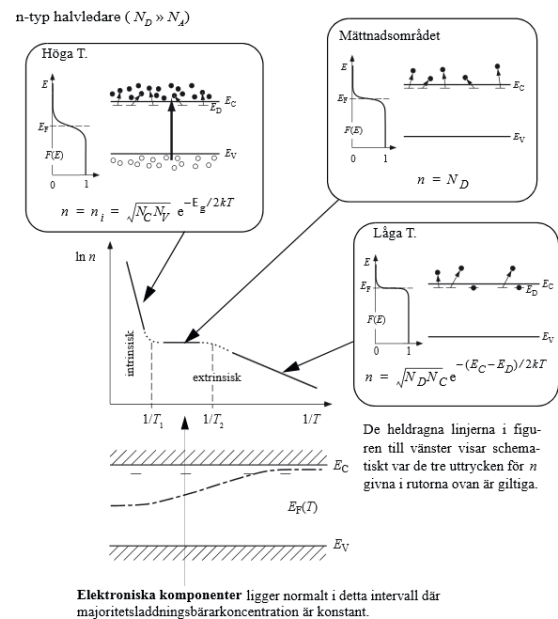
Alla dopatomer har kvar sina hål/elektroner, Fermi-nivån som då sammanfaller med fermienergin ligger då vid acceptor/donatornivån

Låga T

Hål/elektroner från dopatomer exciteras men ingen excitation över bandgapet kan ske, mättnadsområde.

Höga T

Alla dopatomers laddningsbärare har joniserats och laddningsbärare kan exciteras över bandgapet. Antalet som exciteras från valensbandet är mycket större än de från dopatomerna och ledningsförmågan beror inte längre på dopningen och fermi-nivån sammanfaller med den intrinsiska.



6.10 spridning

halvledare

Atomers termiska svängning påverkar laddningsbärarnas mobilitet och spridningstid, så kallade fononer. Orenheter som gör att periodiciteten inte är perfekt påverkar också.

$$\mu_{\text{fonon}} \sim \tau \sim T^{-3/2}$$

$$\mu_{\text{orenheter}} \sim \tau \sim T^{3/2} / N_{\text{störatomer}}$$

För låga T dominerar orenheterna och vid höga T dominerar de termiska svängningarna. Den totala mobiliteten ges av

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu_{\text{fonon}}} + \frac{1}{\mu_{\text{orenheter}}}$$

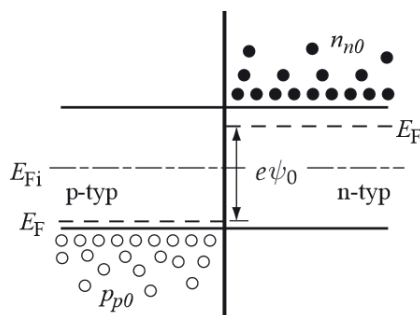
Metaller

I metaller kan endast elektroner nära ferminivån spridas och vi får ett annat temperaturberoende för spridningen från de atomära vibrationerna.

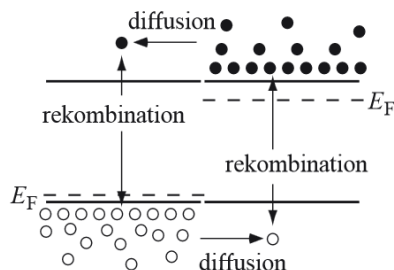
$$\tau \sim \frac{1}{T}$$

Kap 7. Pn-övergången

Pn-övergången innan jämvikt syns nedan.

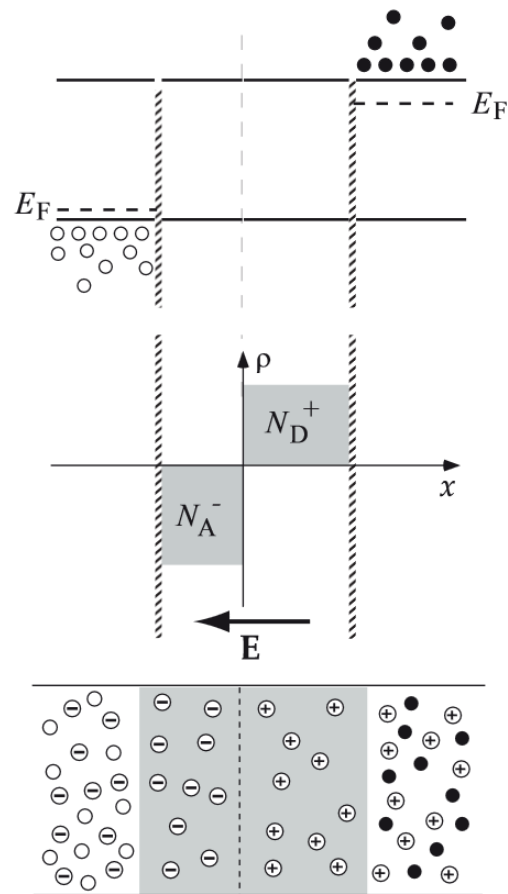


Elektroner och hål börjar diffundera och



rekombinera, detta ger ett underskott på majoritetsladdningsbärare och vi får ett utarmningsområde. Dopatomerna finns fortfarande kvar men deras laddning kan inte

neutraliseras helt längre och laddningstätheten bli i princip dopkoncentrationen.



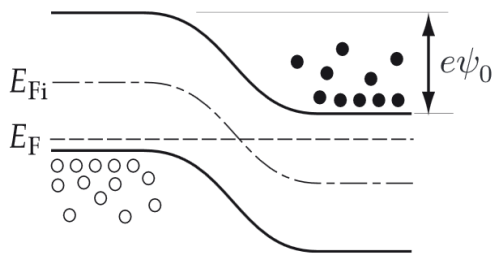
Pga av de laddningar som uppstår bildas ett elektriskt fält. Enligt Gauss

$$\frac{dE}{dx} = \frac{\rho}{\epsilon_s}$$

Fältet är motriktat diffusionen och vid en viss fältstyrka uppstår jämvikt och nettoflödet upphör.

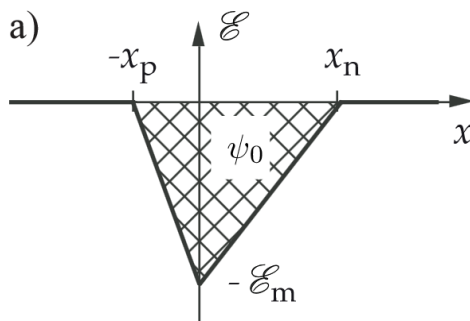
Potentialen ökar när vi går från p till n sidan och en elektron känner energiskillnaden

$$\Delta E_{\text{pot}} = -e\psi_0$$



Ferminivån blir konstant mellan övergångarna.

Det elektriska fältet i pn-övergången blir som bild.



Där arean blir ψ_0 .

Antaget 2 saker:

- Övergången är abrupt, dopningen antas vara konstant
- Inga fria laddningsbärare i utarmningsområdet

Så fås ett uttryck för utarmningsområdets bredd w .

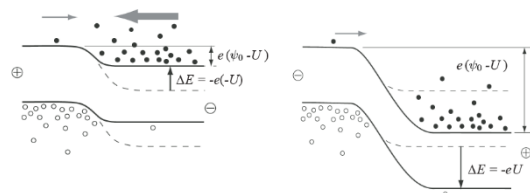
Vidare gäller även att

$$x_p = \frac{N_D}{N_A} x_n$$

Från e-fälts-triangeln fås även att (arean får en triangel)

$$\psi_0 = \frac{E_{max} w}{2}$$

Lägger vi en spänning över pn-övergången så ändras barriärhöjden.



Den nya höjden blir alltså

$$e(\psi_0 - U)$$

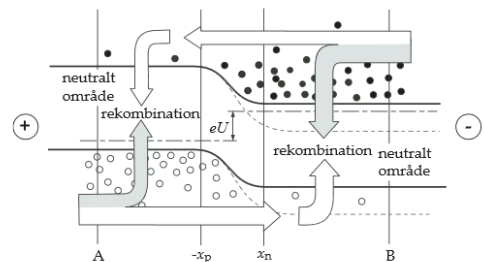
Vid framspänning minskar barriären och utarmningsområdet blir mindre, vid backspänning så ökar barriärhöjden och utarmningsområdet blir också större.

Vid backspänning kan inte laddningsbärare passera barriären men det finns fortfarande en diffusionsström (läckström).

Elektronernas energi är fermifördel vilket ger ett exponentiellt ökat antal elektroner när barriären skänks.

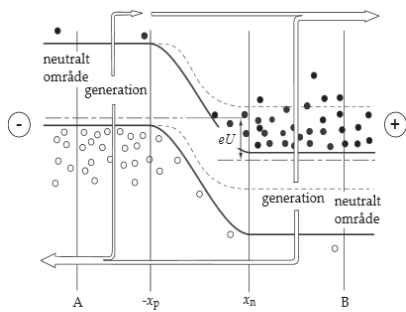
Eftersom det inte (approximativt) finns några fria laddningsbärare i utarmningsområdet (dvs hög resistivitet) och många i det neutrala området (låg resistivitet) antar vi att hela spänningsfallet hamnar över utarmningsområdet då vi lägger på en spänning.

En bit in i det neutrala området kommer elektroner och hål att rekombineras vid framspänning.



Figur 7.21: Majoritetsladdningsbärare möter de injicerade minoritetsladdningsbärarna för att rekombinera.

Vid backspänning kan minoritetsladdningsbärare diffundera över, dessa kan inte ersättas av nya från kontaktarna (- på p-sidan och + på n-sidan så inga elektroner kan komma till p-sidan). Istället sker en termisk generation i det neutrala området.



Figur 7.26: Minoritetsladdningsbärare genereras i angränsande område kring utarmningsområdet, diffunderar till utarmningsområdets kanter och sveps genom utarmningsområdet av det elektriska fältet. De termiskt genererade majoritetsladdningsbärarna flyter ut till kontaktarna.

Kapacitansen definieras som

$$C = \frac{dQ}{dU}$$

Där $Q = eN_D x_n$ är laddning per ytenhet.

Detta blir slutligen

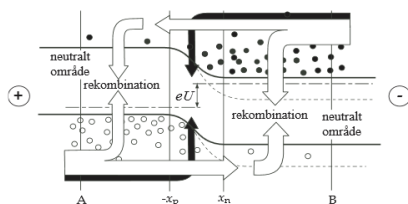
$$C = \frac{\epsilon_s}{w}$$

7.6 Generation och rekombination i utarmningsområdet

Tidigare antagit att det inte skedde någon rekombination i utarmningsområdet. Vid framspänning strömmar det in elektroner/hål i utarmningsområdet, då kommer ju

$$np > n_i^2$$

Så systemet kommer sträva efter jämvikt som görs genom rekombination. Det krävs då ytterligare flöde in, en rekombinationsström (svart pil på bild)



Figur 7.29: Rekombination i utarmningsområdet ger ett bidrag till strömmen genom dioden, på grund av de svarta pilarna.

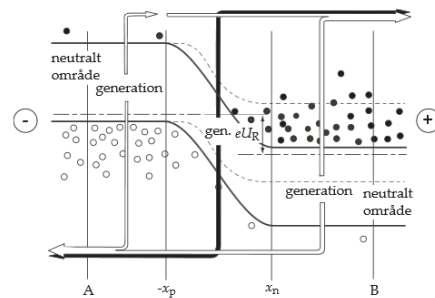
Denna ström är

$$I_{rec} \sim e^{eU/2kT}$$

Vid backspänning minskar istället koncentrationen så att

$$np < n_i^2$$

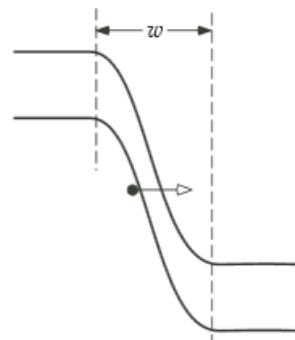
Det måste alltså genereras laddningsbärare för att bli jämvikt. Detta ger upphov till en generationsström som är temperaturberoende då den beror på den termiska generationen.



Figur 7.32: Generation i utarmningsområdet ger ett bidrag till diodströmmen, generationsströmmen (svarta pilar).

7.8 Genombrott vid backspänning

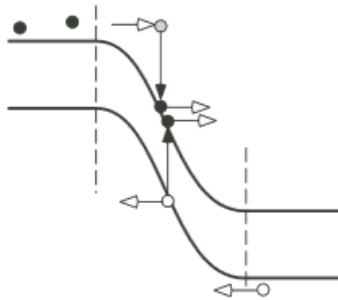
Tunnelgenombrott uppstår i mycket kraftigt dopade dioder som har ett högt E-fält i utarmningsområdet (beror ju på laddinstätheten). Istället för att ta sig över barriären så kan dom tunnla igenom, om den är tillräckligt smal.



Figur 7.36: Är det horisontella avståndet mellan lednings- och valensband tillräckligt litet, så kan elektroner tunnla genom övergången och backströmmen ökar.

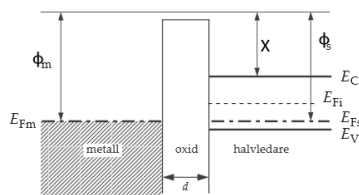
Lavingenombrott sker när accelererade laddningsbärare får tillräckligt hög energi och kolliderar med en elektron i valensbandet. Denna exciteras då och ett elektron/hål-par skapas som i sin tur kan

excitera ytterligare partiklar och man får en kedjereaktion.



Figur 7.37: På sin väg genom utarmningsområdet accelereras elektroner och hål och kan i kollisionsprocesser skapa nya elektron-hål par, backströmmen ökar.

Kap 10 Metall-oxid-övergången (MOS)



Figur 10.1: En ideal MOS struktur. Utträdesarbetena i metallen, ϕ_m , och i halvledaren, ϕ_s , är lika och halvledarbanden är flata i jämvikt. E_{Fi} är halvledarens intrinsiska Fermi-nivå.

Ideal MOS

- $\phi_m = \phi_s$ (utträdesarbet metall/halvledare)
- inga laddningar i oxiden
- Inga likströmmar genom oxiden

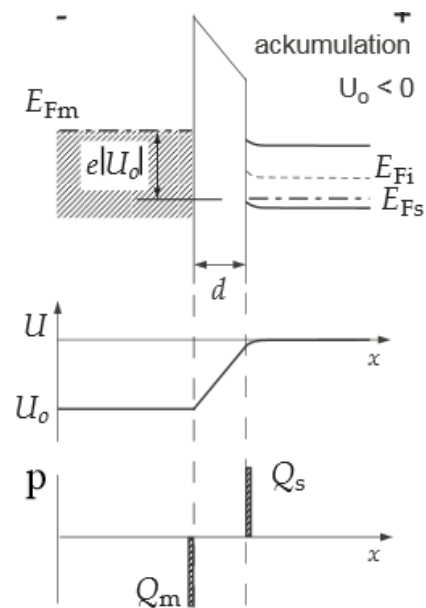
ackumulation

Läggs en spänning över så kommer laddning samlas in till oxiden.

Eftersom

$$p = N_V e^{-(E_{Fs} - E_V)/kT}$$

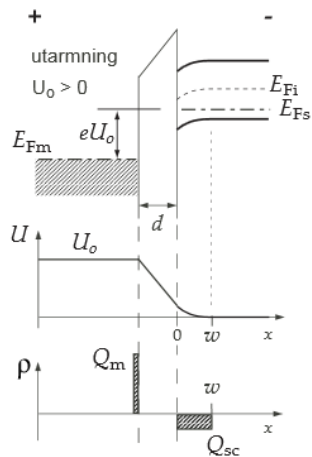
Måste avståndet $E_{Fs} - E_V$ minska om p ska öka i p-typs halvledaren nära oxiden, bandet kommer alltså att vikas uppåt.



Figur 10.2: MOS övergången vid ackumulation, elektrisk potential och laddning i metallen, Q_m , och i halvledarens utarmningsområde, Q_s .

Utarmning

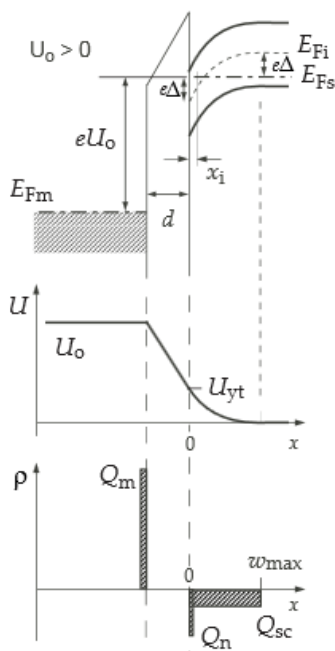
Vänder man polaritet på spänningen viks bandet åt andra hållet och utarmningsområdet i halvledaren ökar i bredd. Vid en viss spänning hamnar fermi-nivån mitt i bandet vid oxiden och halvledaren blir intrinsisk just här.



Figur 10.3: MOS övergången vid utarmning, elektrisk potential och laddning i metallen, Q_m , och i halvledarens utarmningsområde, Q_{sc} .

Inversion

Om spänningen ökas ytterligare kommer bandet böjas ned ännu mer och fermivå kommer tillslut hamna över den intrinsiska, dvs halvledaren har nu blivit en n-typ i stället för en p-typ precis vid oxiden.

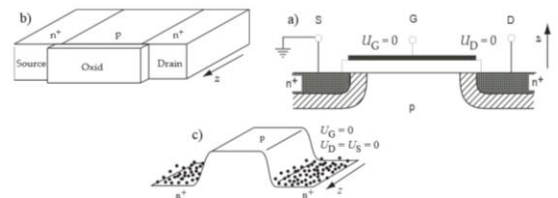


Figur 10.4: MOS övergången vid inversion, elektrisk potential ψ och laddning i metallen, Q_m , i utarmningsområdet, Q_{sc} , och i kanalen, Q_n . ψ_{yt} anger elektriska potentialen vid halvledarytan.

Den spänning som ger inversion är *tröskelspänningen*.

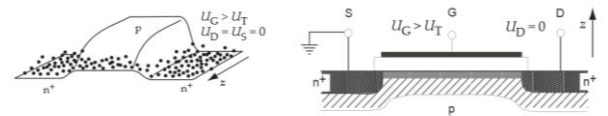
10.3 MOSFET

Om vi sätter flera halvledare runt oxiden fås en MOSFET.



Figur 10.10: a) Strukturen hos en MOSFET. Styrelektroden (gate) ligger på oxiden men är ej utsatt i figuren. b) Schematisk bild som visar halvledarens olika dopade områden nära ytan och oxidskiktet. c) Band-

Det streckade området är utarmningsområdena. Vid en spänning större än tröskelspänningen bildas en inversionskanal under oxiden som gör att laddningsbärare kan flöda.



Figur 10.11: MOSFET med en styrsänning större än tröskelspänningen. En inversionskanal har bildats mellan emitter och kollektor vid halvledarens yta under oxiden. Utarmningsområdet (streckat) sträcker sig från emitter till kollektor.