Föreläsning 9

11.5 $\langle U', \varphi \rangle = \langle U, -\varphi' \rangle$

Egenskaper

① $f(t)\delta_a(t) = f(a)\delta_a(t)$

② $\theta_a' = \delta_a(t)$

③ $f(t)\delta'(t) = f(0)\delta'(t) - f'(0)\delta(t)$

Def 9.1 (s 215)

Om $V' = U$ så kallas V för en primitiv distribution av U.

I så fall kan alla primitiva distributioner till U uttryckas som

$V + C$ ← godtycklig konstant

Ex 9.1 $\delta_a'(t)$ har primitiva distributioner $\delta_a(t) + C$

Sats 9.1 ① $\delta_a(t)$ har primitiva distributioner $\theta_a(t) + C$, ty ②

② $f(t)\,\theta_a(t)$ har primitiva distributioner

$(F(t) - F(a))\,\theta_a(t) + C$ där $F'(t) = f(t)$

Bevis av ②

$$[(F(t) - F(a))\,\theta_a(t)]' = (F(t) - F(a))'\theta_a(t) + (F(t) - F(a))\,\theta_a'(t) =$$

$$= f(t)\theta_a(t) + (F(t) - F(a))\delta_a(t) = f(t)\,\theta_a(t) + \underbrace{(F(a) - F(a))}_{0}\delta_a(t) = f(t)\,\theta_a(t)$$

Ex 9.2 $t\theta(t-1) = t\theta_1(t)$ har primitiva distributioner $\left(\frac{t^2}{2} - \frac{1^2}{2}\right)\theta_1(t) + C$

Ex 9.3 (s 216)

Lös ekvationen $y^{(4)}(t) = \delta'(t)$

Lösn $y^{(4)}(t) = \delta'(t) \Rightarrow y'''(t) = \delta(t) + C_1$

$\Rightarrow y''(t) = \theta(t) + C_1 t + C_2$

$\Rightarrow y'(t) = (t-0)\,\theta(t) + C_1\frac{t^2}{2} + C_2 t + C_3$

$\Rightarrow y(t) = \left(\frac{t^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right)\theta(t) + C_1\frac{t^3}{6} + C_2\frac{t^2}{2} + C_3 t + C_4$ som är lösningar

11.6

Def 9.2 (s 216) Vi skriver $U_n \to U$ då $n \to \infty$ om för alla $\varphi(t) \in D$ gäller

$\langle U_n, \varphi \rangle \longrightarrow \langle U, \varphi \rangle$ då $n \to \infty$

∴ Man kan definiera distributionsserie $\sum_{k=1}^{\infty} U_k \overset{def}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} U_k$

Sats 9.2 (s 217) $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ konvergerar $\Rightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty} U_n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} U_n'$

11.7

Def 9.3 (s 220) Faltningen mellan $\varphi \in D$ och en distribution U är definierad genom $(\varphi * U)(t) \overset{def}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t-\tau)\, U(\tau)\, d\tau$

Obs $\varphi * U \in C^{\infty}(\mathbb{R})$

Ex 9.3 (s 220)

$\varphi \in D \Rightarrow (\varphi * \delta)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t-\tau)\,\delta(\tau)\, d\tau = \varphi(t-0) = \varphi(t)$

dvs $\varphi * \delta = \varphi$

Anm. Faltningen $U * V$ kan inte vara väl-definierad för alla distributioner U och V. Men om det går att definieras den så gäller:

Sats 9.3 (s 221)

1. $U * V = V * U$
2. $U * (V + W) = U * V + U * W$
3. $(U * V) * W = U * (V * W)$
4. $\delta * U \overset{def}{=} U$
5. $(U * V)' = U' * V = U * V'$

Ex 9.4
1. $f(t) * \delta(t) = f(t)$
2. $f(t) * \delta'(t) = (f(t) * \delta(t))' = f'(t)$
3. $f(t) * \delta''(t) = (f(t) * \delta(t))'' = f''(t)$

Kap 12 Frekvensanalys

12.1-12.2 Def 9.4 (s 230)

Ett system S kallas reellt om $S(w(\tau))(t)$ är reell om $w(\tau)$ är reell.

Sats 9.4. Ett LTI system S är reellt $\Leftrightarrow$ S har impulssvaret $h(t)$ som är en reell funktion.

ty $S(w(t))(t) = w * h(t)$

S är LTI $\Leftrightarrow$ S har impulssvaret $h(t)$

$\Rightarrow$ För en insignal e^{st} som kallas en svängning med komplex frekvens

s ett komplext tal gäller $S(e^{s\tau}, t) = (e^{s\tau} * h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{s(t-\tau)} h(\tau)\, d\tau$

$= e^{st} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s\tau} h(\tau)\, d\tau$

skrivs $e^{st} H(s)$

där $H(s) \overset{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s\tau} h(\tau)\, d\tau$ kallas överföringsfunktionen av LTI systemet S

$\therefore$ $e^{st} \xrightarrow{S} e^{st} \underbrace{H(s)}$ som är oberoende av t

<u>Ex 9.1</u> Bestäm $H(s)$ för systemet

$w(t) \xrightarrow{S} y(t)$ som är definierad av

$y' + a_0 y = b_1 w' + b_0 w$ där a_0, b_1, b_0 är givna konstanter

<u>Lösn</u> $\underset{e^{st}}{\overset{w}{\parallel}} \xrightarrow{S} \underset{e^{st}H(s)}{\overset{y}{\parallel}}$

$\therefore$ $\left(e^{st} H(s)\right)'_t + a_0 \left(e^{st} H(s)\right) = b_1 \left(e^{st}\right)'_t + b_0 \left(e^{st}\right)$

så är $e^{st} \cdot s\, H(s) + a_0 e^{st} H(s) = b_1 e^{st} s + b_0 e^{st}$

$(s + a_0) H(s) = b_1 s + b_0$

$H(s) = \dfrac{b_1 s + b_0}{s + a_0}$

<u>Allmänt gäller</u> <u>Sats 9.6</u> (s 233)

För $w \xrightarrow{S} y$ där $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = b_m w^{(m)} + b_{m-1} w^{(m-1)} + \dots + b_0 w$

$$H(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}$$

<u>Sats 9.7</u> (s 233)

För $w \xrightarrow{S} y$ där

$$\begin{cases} \bar{x}' = A_{2\times 2} \bar{x} + B_{2\times 1} w(t) & S_1 \\ y = C_{1\times 2} \bar{x} + D_{1\times 1} w(t) & S_2 \end{cases}$$

gäller $H(s) = C(sI - A)^{-1} B + D$

Idé av bevis

$$\begin{array}{ccccc} w & \xrightarrow{S_1} & \bar{x} & \xrightarrow{S_2} & y \\ \| & & \| & & \| \\ e^{st} & & \bar{H}_1(s)e^{st} & & H(s)e^{st} \end{array}$$

$$e^{st} \xrightarrow{S} H(s)e^{st}$$