5/3-2018. Dugga Fredag 8^{00} - 10^{00} [MA:10]

(9) Ex) $X(t)$ = Antalet kollisioner mellan 0 och t

$X(t) \in P_o(\lambda t)$, $P_{X(t)}(k) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}$, $k = 0, 1, \ldots$

dvs Medelantalet kollisioner till t

$E(X(t)) = \lambda t$

Låt Y = tiden till första koll.

$F_Y(t) = P(Y \le t) = 1 - P(Y > t) = 1 - P(X(t) = 0) =$

$= 1 - P_{X(t)}(0) = 1 - e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^0}{0!} = 1 - e^{-\lambda t}$, $t > 0$

dvs $Y \in Exp(\lambda)$

Medelantalet kollisioner / tidsenhet

$$E\left(\frac{X(t)}{t}\right) = \frac{1}{t}E(X(t)) = \frac{1}{t}\lambda t = \lambda$$

$$V\left(\frac{X(t)}{t}\right) = \frac{1}{t^2}V(X(t)) = \frac{1}{t^2}\lambda t = \frac{\lambda}{t}$$

dvs $\frac{X(t)}{t}$ är nära λ om t stor, $t \gg \lambda$

Antag att $\lambda = 2$/t.e.

a) Vad är ~~...~~ slh att det inte ~~har~~ blivit någon kollision efter 1 t.e.

Lsg) $X(1) \in P_o(\lambda \cdot 1) = P(2)$

$$P(X(1) = 0) = P_{X(1)}(0) = e^{-2}\cdot\frac{2^0}{0!} = e^{-2} \approx 0{,}135$$

Alt: Tiden till nästa koll $Y \in Exp(2)$

b) Antag att det skett två kollisioner efter 3 t.e.

Vad är slh. att båda dessa inträffat innan 1 t.e.

$$P(X(1) = 2 \mid X(3) = 2) = \frac{P(X(1) = 2, X(3) = 2)}{P(X(3)=2)}$$

$$= \frac{P(X(1) = 2, X(3) - X(1) = 0)}{P(X(3) = 2)} = \left[\begin{array}{l} X(3) - X(1) \in P(2\cdot\lambda) \\ X(1) \in P_o(1\cdot\lambda) \\ X(3) \in P_o(3\cdot\lambda) \end{array}\right] =$$

oberoende

$$= \frac{P_{X(1)}(2)\cdot P_{X(3)-X(1)}(0)}{P_{X(3)}(2)} = \frac{\cancel{e^{-\lambda}}\frac{\lambda^2}{\cancel{2!}}\cdot \cancel{e^{-2\lambda}}\frac{(2\lambda)^0}{0!}}{\cancel{e^{-3\lambda}}\frac{(3\lambda)^2}{\cancel{2!}}} = \frac{\cancel{\lambda^2}}{9\cancel{\lambda^2}} = \frac{1}{9}$$

Exdugga 2011-03-04

Uppgift 4. Låt X = kagel längd dag 1.
Y = — " — 2.

X & $Y \in Exp(1)$, ober.

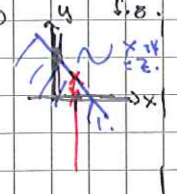
$Z = X + Y$ = total längd på 2 dagar.

$$F_Z(z) = P(Z \le z) = P(X + Y \le z) = \iint_{x+y\le z} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^z e^{-x}\int_0^{z-x} e^{-y}\,dy\,dx = \left| f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} e^{-x}e^{-y} & x \ge 0,\ y \ge 0 \\ 0 & \text{f.ö.} \end{cases} \right|$$

$$= \int_0^z e^{-x}\left[-e^{-y}\right]_0^{z-x} dx = \int_0^z e^{-x}(1 - e^{-z}\cdot e^{x})\,dx =$$

$$= \int_0^z (e^{-x} - e^{-z})\,dx = \left[-e^{-x} - xe^{-z}\right]_0^z =$$



$= 1 - e^{-z} - ze^{-z}$, $z \ge 0$.

$f_Z(z) = F_Z'(z) = e^{-z} - (e^{-z} - ze^{-z}) = ze^{-z}$, $z \ge 0$.

b) $P(Z \ge 4) = 1 - F_Z(4) = 1 - (1 - e^{-4} - 4e^{-4}) = 5e^{-4}$

$\approx 0{,}0916$

Uppgift 2.

Låt B = "Slumpm. vald bil har tillsatsen."

A = "testet ger positivt resultat."

$P(B) = 0{,}05$

$P(A|B) = 0{,}9$, $P(A|B^*) = 0{,}03$

• Satsen om total slh.

a) $P(A) = P(A|B)\cdot P(B) + P(A|B^*)\cdot P(B^*) =$

$= 0{,}9\cdot 0{,}05 + 0{,}03\cdot 0{,}95 \approx 0{,}0735$

b) $P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{P(A|B)\cdot P(B)}{P(A)} = \frac{0{,}90\cdot 0{,}05}{0{,}0735} \approx 0{,}61$