13/2 2012 9

Def Normer: H linjärt rum med norm $\|u\|$

1) $\|u\| \geq 0$; $\|u\| = 0,\ u \equiv 0$
2) $\|ku\| = |k|\,\|u\|$
3) $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$

Ex Finns många normer.

• L_p-normer, $1 \leq p$

$\|f\|_{L_p} = \left(\int |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}$ blir norm på det linjära rummet

$L_p = \{$integrerbara funktioner : $\|f\|_{L_p} < \infty\}$

Viktigast är L_1 och L_2

L_2 har skalärprodukt.

$$(f|g) = \int f(x)g(x)\,dx$$

$$\|f\|_{L_2} = \sqrt{(f|f)}$$

– andra L_p har ej

• Supremum-normer

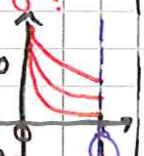
$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in\Omega} |f(x)|$$

Vi säger att $u_k \to u$ då $k \to \infty$

$\|u_k - u\| \to 0$ då $k \to \infty$

Ex $\Omega = (0,1)$, $u_k(x) = e^{-kx}$, $u(x) = 0$

Skriva $u_k \to 0$?



i supremumnormen:

$$\|u_k(x) - 0\|_\infty = \sup_{0<x<1} |e^{-kx}| = 1 \neq 0$$

$\therefore u_k \not\to 0$ i supremumnormen.

{Konvergens i supremumnorm kallas likformig konvergens.}

Men i L_2-norm:

$$\|u_k - 0\|_{L_2} = \left(\int_0^1 |e^{-kx} - 0|^2\,dx\right)^{1/2} = \left(\int_0^1 e^{-2kx}\,dx\right)^{1/2} = \left(\left[\frac{e^{-2kx}}{-2k}\right]_0^1\right)^{1/2} = \left(\frac{1-\underbrace{e^{-2k}}_{\to 0}}{\underbrace{2k}_{\to\infty}}\right)^{1/2} \to 0$$

$\therefore e^{-kx} \to 0$ i L_2

H pre-Hilbertrum $(u|v)$ skalärprodukt, norm $\|u\| = \sqrt{(u|u)}$

Låt $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ vara ortogonal följd i H (Ortogonal: $(\varphi_j|\varphi_k) = 0$ $j \neq k$)

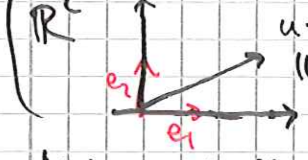
anta att det finns c_k:

$\|u - \sum_{k=1}^N c_k\varphi_k\| \to 0$ då $N \to \infty$

Då är $u = \sum_{k=1}^\infty \frac{(\varphi_k|u)}{(\varphi_k|\varphi_k)}\varphi_k$

Fourierkoefficienten.

($\mathbb{R}^2$



$u = c_1e_1 + c_2e_2 = (c_1, c_2)$.

$\|u\|^2 = c_1^2 + c_2^2$)

Motsvarande ~~ex~~: Parsevals formel:

$$\|u\|^2 = \sum_{k=1}^\infty \left|\frac{(\varphi_k|u)}{\|\varphi_k\|^2}\right|^2$$

$$(u|v) = \sum_{k=1}^\infty \frac{(\varphi_k|u)(v|\varphi_k)}{\|\varphi_k\|^2}$$ Snyggast om $\|\varphi_k\| = 1$.

$\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ sägs vara ortogonal bas om φ_k är parvis ortogonala och varje u kan skrivas $u = \sum_{k=1}^\infty \frac{(\varphi_k|u)}{\|\varphi_k\|^2}\varphi_k$

$\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ ortonormerad bas om $(\varphi_k|\varphi_j) = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ 1 & j = k \end{cases}$ och varje u kan skrivas

$$u = \sum_{k=1}^\infty (\varphi_k|u)\varphi_k.$$

Parseval: $\|u\|^2 = \sum_{k=1}^\infty |(\varphi_k|u)|^2 < \infty$

Baklänges fa c_k ; $\sum_{k=1}^\infty |c_k|^2 < \infty \Rightarrow \sum_{k=1}^\infty c_k\varphi_k$ Om rummet är fullständigt.

ett pre-Hilbertrum som är fullständigt kallas Hilbertrum.

Ex {$\mathbb{Q}$ är inte fullständigt
{$\mathbb{R}$ är fullständigt

$\{1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{100} + \frac{4}{1000} \ldots \to \sqrt{2}$ finns ej i $\mathbb{Q}$, men $\mathbb{R}$

L_2 är fullständigt ; Hilbertrum.

H linjärt rum med norm $\|u\|$

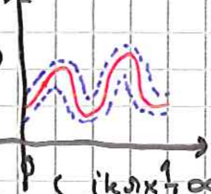
$U \subset H$ sägs vara tät delmängd av H om till varje $f \in H$ och varje $\varepsilon > 0$ så finns $u \in U$: $\|f - u\| < \varepsilon$.

Ex $\mathbb{Q}$ är tät i $\mathbb{R}$

Polynom är täta i $C(I)$ I kompakt. i $\|\cdot\|_\infty$ norm.

$C(I)$ är tät i $L_2(I)$

polynom är täta i $L_2(I)$, I kompakt.



Ex $I = [0,T]$; då är $\{e^{ik\Omega x}\}_{k=1}^\infty$ ortogonal bas i $L_2(I)$

$\Omega T = 2\pi$.

Kan istället välja bas av polynom $[p_k]_{k=0}^\infty$ grad $p_k = k$, valda så att $(p_j|p_k) = 0$ $j \neq k$.

Ex Legendre-polynom $\{p_k\}_{k=1}^\infty$ är ortogonala på $L_2([-1,1])$

även $\{\sin k\pi x\}_{k=1}^\infty \cup \{\cos k\pi x\}_{k=1}^\infty$ ortogonal bas.

<u>Operatorer</u>

Avbildning $A: H_1 \to H_2$ H_1, H_2 pre-Hilbertrum.
kallas **linjär** $A(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) = \lambda_1 A u_1 + \lambda_2 A u_2$.
kallas **begränsad** (kontinuerlig) om

$$\|Au\|_{H_2} \leq C \|u\|_{H_1} \text{ för alla } u \in H_1$$

och någon konstant C.

<u>Exl</u> $A = D$ derivation $u \in C^1(I)$, $Du = u' \in C^0(I)$

$D: C^1(\Omega) \longrightarrow C^0(I)$, norm L_2.

D är ej begränsad ta $u_k = e^{ikx}$,
$\|u_k\|_{L_2} = \sqrt{|I|}$ $(\int |u_k|^2 dx)^{1/2}$
↳ intervall längd.

$\|Du_k\| = \|ik e^{ikx}\| = k\|e^{ikx}\| \leq C\|e^{ikx}\|$