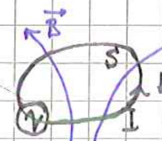
1/10 2012

Induktionslagen (7.1.3)

(9) Experimentellt faktum (observation) Michael Faraday 1831.



I slingan L flyter strömmen I. Slingan har resistansen R och drivs med en källa med emk V_0.

Det magnetiska flödet genom slingan $\Phi = \iint_S \vec{B}\cdot\hat{n}\,dS$. Faraday observerade: $I\cdot R = V_0 - \frac{d\Phi}{dt}$.

Kommentarer:

1) Strömmen i slingan avviker från det värde som ges av Kirchhoffs lag med en extra emk.

$$\boxed{V = -\frac{d\Phi}{dt}} \text{ Faradays lag.}$$

Flödesändringarna leder till en emk som motverkar flödesändringarna. (Lenz lag)

2) Det är oväsentligt om flödesändringarna sker genom att
a) fältet $\vec{B}$ ändras genom en stillastående slinga
b) slingan som rör sig i ett yttre $\vec{B}$-fält.

Resultatet från stationära strömmar är

$$V_0 = \int_L \left(\frac{\vec{J}}{\sigma} - \vec{E}\right)\cdot d\vec{l} = R\cdot I - \int_L \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

Tangentlinjeintegral över de icke-elektriska krafterna.

$\int \vec{E}\cdot d\vec{l}$ var noll i elstatiken. I det dynamiska fallet: $\int \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\iint_S \vec{B}\cdot\hat{n}\,dS$

Faradays lag

Maxwell insåg att ledningsslingans närvaro ej var väsentlig. För en godtycklig kurva (sluten) L (rand till ytan S) gäller

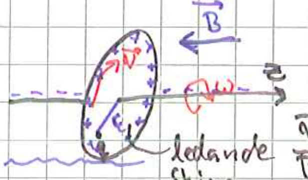
$$\boxed{\int_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\iint_S \vec{B}\cdot\hat{n}\,dS}$$

Vi skriver om med Stokes sats

$$\iint (\nabla\times\vec{E})\cdot\hat{n}\,dS \underset{\text{Stokes sats}}{=} \int_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\iint_S \vec{B}\cdot\hat{n}\,dS =$$

$$= -\iint_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot\hat{n}\,dS \quad S \text{ godtycklig} \Rightarrow \boxed{\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}}$$

Ex) Induktion (Faradaygeneratorn)



Laddningsbärarna på skivan känner av en kraft $\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B}$

$\vec{v} = \omega r_c\hat{\phi}$

$\vec{B} = B\hat{z}$

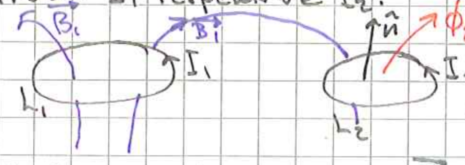
$\vec{F} = q\omega r_c B\,\hat{\phi}\times\hat{z} = q\omega r_c B\,\hat{r}_c$. Den elektromot. kraften

$$V = \int_0^a \omega r_c B\,\hat{r}_c\cdot\hat{r}_c\,dr_c = \boxed{\frac{1}{2}\omega B a^2}$$

Induktans (7.2.3)

(Stationära strömmar)

Betrakta två slingor L_1 och L_2 med ström I_1 respektive I_2.



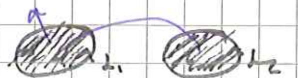
Flödet genom L_2 från L_1 är $\Phi_2 = \iint_{S_2} \vec{B}_1\cdot\hat{n}\,dS$

Biot-Savarts lag visar att $\vec{B}_1$ är proportionell mot I_1. $\Phi_2 = M_{21}I_1$ där M_{21} kallas den ömsesidiga induktansen [H] Henry. (Beror endast på geometri)

Flödet genom L_1 från L_2 ger ömsesidig induktans M_{12}. Symmetri ger att $M_{12} = M_{21} = M$. (Visas i boken)

Även begreppet självinduktans L definieras $\boxed{\Phi = L\cdot I}$

Notera att flödet ~~från~~ $\Phi > \Phi_2 \Rightarrow L > M$.



Potentialer (kap 10.1.1)

Faradays lag $\left(\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)$ medför att vi nu ej längre kan (entydigt) definiera en potential V som $\vec{E} = -\nabla V$. Istället utnyttjar vi flödeskonservering $\nabla\cdot\vec{B} = 0$. (gäller även tidsberoende förlopp) $\vec{B} = \nabla\times\vec{A}$ (som tidigare)

Faraday $\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\nabla\times\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$

$$\nabla\times\left(\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = \vec{0} \Rightarrow \vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\nabla V$$

$$\boxed{\vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}}$$

Effektkonservering (kap 7.2.4)

Utgå från $\vec{E} + \nabla V + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = \vec{0}$

Skalärmultiplicera med strömtätheten $\vec{J}$ och integrera över $\mathbb{R}^3$ (antag $\vec{J} = 0$ utanför en ändlig volym)

$$\underbrace{\iiint_{\mathbb{R}^3} \vec{E}\cdot\vec{J}\,dv}_{1} + \underbrace{\iiint_{\mathbb{R}^3} \nabla V\cdot\vec{J}\,dv}_{2} + \underbrace{\iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\cdot\vec{J}\,dv}_{3} = 0$$

(1) Denna term visade vi tidigare (kap 7.1.1) Effektutvecklingen P som det elektriska fältet utför på laddningsbärarna. (jmf. $P = RI^2$)

(2) Denna term kan visas vara $\frac{d}{dt}\iiint_{\mathbb{R}^3} \vec{D}\cdot\vec{E}\,dv$ (linjära materialer). Effekten —

(3) Denna term är av magnetisk natur $\frac{d}{dt}$ Magnetiskt upplagrad ~~effekt~~ energi.

Effektbalans

$$\underset{1}{\text{Effektutvecklingen}} + \frac{d}{dt}(\underset{2}{\text{el.}} + \underset{3}{\text{magn.}}\ \text{energi}) = 0$$

Magnetisk energi (kap 7.2.4)

Vi skriver $\frac{d}{dt}W_m = \iiint \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\cdot\vec{J}\,dv$. Låt strömmen vara begränsad till två slingor $\vec{J}\,dv \to I_1 d\vec{l}_1 + I_2 d\vec{l}_2$

Man kan visa $\frac{d}{dt}W_m = I_1\frac{d}{dt}\Phi_1 + I_2\frac{d}{dt}\Phi_2$ (Flödet genom L_1, Flödet genom L_2)

$$= I_1\frac{d}{dt}(L_1 I_1 + M_{12}I_2) + I_2\frac{d}{dt}(L_2 I_2 + M_{21}I_1) =$$

*) för $L_{11} = L_1$; $L_{22} = L_2$; $L_{ij} = M_{ij}$

$$\frac{d}{dt}W_m = \underbrace{L_{11}I_1\frac{dI_1}{dt}}_{\frac{1}{2}\frac{d}{dt}L_{11}I_1^2} + \underbrace{\left(L_{12}I_1\frac{dI_2}{dt} + L_{21}I_2\frac{dI_1}{dt}\right)}_{L_{12}\frac{d}{dt}(I_1 I_2)} + \underbrace{L_{22}I_2\frac{dI_2}{dt}}_{\frac{1}{2}\frac{d}{dt}L_{22}I_2^2} \Rightarrow \frac{d}{dt}W_m = \frac{d}{dt}\sum_i\sum_j \frac{1}{2}L_{ij}I_iI_j$$