Föreläsning 8

Kap 11 Distributioner (generaliserade funktioner)

11.1-11.3 Vi inför

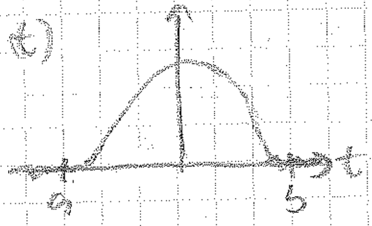
① $\varphi(t) \in C^\infty(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \varphi(t)$ är oändligt många gånger deriverbar i $\mathbb{R}$

② $\varphi(t)$ har ett kompakt stöd $\Leftrightarrow \varphi(t) = 0$ utanför ett slutet intervall $[a, b]$.

③ $\varphi \in D \Leftrightarrow \varphi(t)$ uppfyller ① och ②

Funktionen $\varphi(t)$ i D kallas testfunktioner

testfunktion $\varphi(t)$



Def 8.1 (s 204)

En distribution T är en kontinuerlig, linjär avbildning som avbildar varje testfunktion φ på ett tal $\langle T, \varphi \rangle$:

$$\varphi \xrightarrow{T} \langle T, \varphi \rangle$$

Obs

Talet $\langle T, \varphi \rangle$ kan också uttryckas som

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} T(t)\, \varphi(t)\, dt$$

Där integralen och $T(t)$ har ingen betydelse för många distributioner T.

Ex 8.1 (s 205)

Varje lokalt absolut integrerbar funktion $f(t)$, (dvs $f(t)$ och $|f(t)|$ är integrerbar i varje slutet intervall $[a, b]$)

Kan betraktas som en distribution:

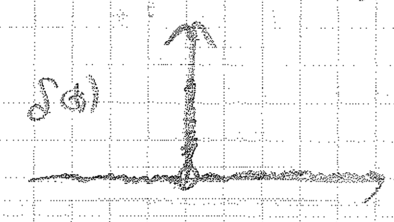
testfunktion $\varphi(t) \xrightarrow{f} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t)\,dt$ som är ett tal

$\therefore$ $\theta(t)$ är en distribution

Ex 8.2 (s 205)

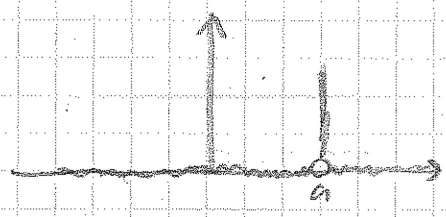
① Deltafunktionen $\delta(t)$ är en distribution

$$\varphi \xrightarrow{\delta} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\varphi(t)\,dt = \varphi(0)$$



② $\delta_a(t) = \delta(t-a)$ är en distribution:

$$\varphi \xrightarrow{\delta_a} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)\varphi(t)\,dt = \varphi(a)$$



Egenskaper

① U, V är distributioner

$\Rightarrow$ $c_1 U + c_2 V$ är distributioner:

$$\varphi \xrightarrow{c_1U + c_2V} c_1 \int_{-\infty}^{\infty} U(t)\varphi(t)\,dt + c_2 \int_{-\infty}^{\infty} V(t)\varphi(t)\,dt$$

② Ingen allmän definition av UV för alla distributioner U, V.

Men UV kan definieras för vissa U, V

(2.1) $f(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$, U är distribution

$\Rightarrow$ $f(t)U$ är distribution:

$$\varphi \xrightarrow{f(t)U} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)U(t)\varphi(t)\,dt$$

$$\overset{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} U(t)\underbrace{\left(f(t)\varphi(t)\right)}_{\text{ny testfunktion}}\,dt = \text{ett tal}$$

dvs $\langle f(t)\,U, \varphi \rangle \overset{def}{=} \langle U, f(t)\varphi \rangle$

(2.2) $f(t)\,\delta_a(t) \overset{def}{=} f(a)\,\delta_a(t)$ för alla funktioner $f(t)$

Motivering $\langle f(t)\,\delta_a(t), \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\delta_a(t)\,\varphi(t)\,dt$

$= \int_{-\infty}^{\infty} \delta_a(t)\,(f(t)\varphi(t))\,dt = f(a)\varphi(a) = f(a)\int_{-\infty}^{\infty}\delta_a(t)\varphi(t)\,dt$

$\therefore$ $\theta(t)$ är en distribution!

$= \int_{-\infty}^{\infty} \delta_a(t)\,f(a)\,\varphi(t)\,dt = \langle f(a)\,\delta_a(t), \varphi \rangle$

4.4 Def 8.2 (s 206) Distributionsderivatan

U' av distributionen U är definierad genom

$\langle U', \varphi \rangle \overset{def}{=} \langle U, -\varphi' \rangle$ för alla testfunktioner φ

$\therefore$ Alla distributioner är deriverbara.

Motivering För en vanlig deriverbar $f(t)$ gäller

$\langle f', \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\varphi(t)\,dt$ partiell integration

$= \left[f(t)\underset{\substack{\uparrow \\ \text{kompakt stöd}}}{\varphi(t)} \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi'(t)\,dt$

$= 0 + \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,(-\varphi'(t))\,dt = \langle f, -\varphi' \rangle$

Sats 8.1 (s 209)

(1) $(c_1U + c_2V)' = c_1U' + c_2V'$

(2) $(f(t)\,U)' = f'(t)\,U + f(t)\,U'$

Sats 8.2 (s 208-214)

(1) $\theta'(t) = \delta(t)$

(2) $\theta_a'(t) = \delta_a(t)$ dvs $(\theta(t-a))' = \delta(t-a)$

(3) $f(t)\,\delta_a(t) = f(a)\,\delta_a(t)$ för alla funktioner $f(t)$

(4) $f(t)\,\delta'(t) = f(0)\,\delta'(t) - f'(0)\,\delta(t)$

$\delta_0(t) = \delta(t)$

Bevis (1) $\langle \theta'(t), \varphi \rangle \underset{\text{enl. def}}{=} \langle \theta(t), -\varphi' \rangle$

$= \int_{-\infty}^{\infty} \theta(t)(-\varphi'(t))\,dt = \int_{0}^{\infty} 1\cdot(-\varphi'(t))\,dt = -\int_{0}^{\infty} \varphi'(t)\,dt = -[\varphi(t)]_0^{\infty}$

$= \varphi(0) = \langle \delta(t), \varphi \rangle$

dvs $\langle \theta', \varphi \rangle = \langle \delta, \varphi \rangle$ för alla $\varphi \in D$ som ger $\theta' = \delta$ i distributionsmening

(4) $f(t)\delta'(t) = (f(t)\delta(t))' - f'(t)\delta(t) \overset{(3)}{=} (f(0)\delta(t))' - f'(0)\delta(t)$

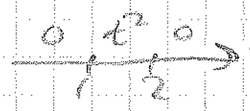
$= f(0)\delta'(t) - f'(0)\delta(t)$

Ex 8.3 (s 210)

$(t\theta(t))' = (t)'\theta(t) + t\theta'(t) = \theta(t) + t\delta(t) = \theta(t) + 0\,\delta(t) = \theta(t)$

Ex 8.4 (s 211)

Derivera distributionen $f(t) = \begin{cases} t^2, & 1 < t < 2 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$



Bevis

Skriv $f(t) = t^2(\theta(t-1) - \theta(t-2)) \overset{\text{dvs}}{=} t^2(\theta_1(t) - \theta_2(t))$

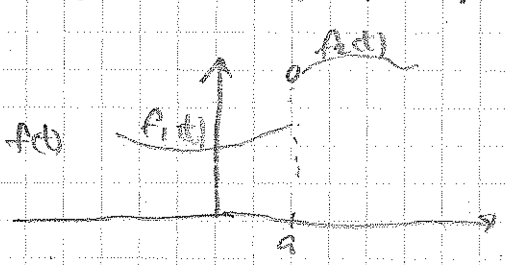
$\therefore f'(t) = (t^2(\theta_1(t) - \theta_2(t)))' = 2t(\theta_1(t) - \theta_2(t)) + t^2(\delta_1(t) - \delta_2(t))$

$= 2t(\theta_1(t) - \theta_2(t)) + t^2\delta_1(t) - t^2\delta_2(t) =$

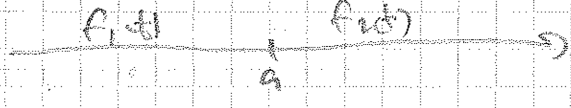
$= 2t(\theta_1(t) - \theta_2(t)) + 1^2\delta_1(t) - 2^2\delta_2(t)$

Sats 8.3 (s 212)

Antag att $f(t)$ har ett språng i brytpunkten a



Skriv $f(t)$



[illegible]

$f'(t)$: $\quad f_1'(t) \quad a \quad f_2'(t)$

$\uparrow$ $\left(f_2(a+0) - f_1(a-0)\right)\delta_a(t)$

δηλ.

$$f'(t) = \begin{cases} f_1'(t) & \text{αν } t < a \\ \left(f_2(a+0) - f_1(a-0)\right)\delta_a(t), & \text{αν } t = a \\ f_2'(t) & \text{αν } t > a \end{cases}$$

$f''(t)$: $\quad f_1''(t) \quad a \quad f_2''(t)$

$\uparrow$ $\left(f_2(a+0) - f_1(a-0)\right)\delta_a'(t) + \left(f_2'(a+0) - f_1'(a-0)\right)\delta_a$

Ex 7.5

$f(t)$: $\quad 0 \quad 1 \quad t^2 \quad 2 \quad 0$

$f'(t)$: $\quad 0 \quad 1 \quad 2t \quad 2 \quad 0$

$(1^2 - 0)\delta_1 \qquad (0 - 2^2)\delta_2$

$f''(t)$: $\quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 2 \quad 0$

$\delta_1' + (2\cdot 1 - 0)\delta_1 \qquad -4\delta_2' + (0 - 2\cdot 2)\delta_2$