26/2 2013 (8)

Ex) Vid stickprovskontroll i en tillverkningsprocess behöver processen justeras om minst 3 av 15 enheter är fel.
Vad är sannolikheten för justering om 10% i hela partiet är felaktiga?

Låt $X$ = Antal felaktiga av de 15.

$X \in Bin(n,p)$ $n=15$, $p=0.1$

$P(\text{justering}) = P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - \sum_{k=0}^{2} p_X(k) =$

$= 1 - \left( \binom{15}{0} 0{,}1^0 \cdot 0{,}9^{15} + \binom{15}{1} 0{,}1^1 \cdot 0{,}9^{14} + \dots \right) =$

$\approx 0{,}1841.$

Alt. $1 - P(X \leq 2) = 1 - F_X(2) = [\text{tab } 6] =$

$= 1 - 0.81594 \dots$

Ex) Fråga 100 personer: "Tycker du att kärnkraften ska läggas ner?".
Vad är slh att svarar 'Ja'?
Om "sanna andelen" Ja-anhängare är 45%.

Låt $X$ = antal Ja-svar. $X \in bin(n,p)$.
$n = 100$, $p = 0.45$

Eftersom $np(1-p) = 100 \cdot 0{,}45 \cdot 0{,}55 \approx 24{,}75 > 10$

$X \overset{\sim}{\in} N(E(X), D(X))$, $X \in N(n \cdot p, \sqrt{np(1-p)})$

$X \overset{\sim}{\in} N(45, \sqrt{24{,}75})$

Majoritet om $X > 50$

$P(X > 50) = 1 - P(X \leq 50) \approx 1 - \Phi\left(\frac{50-45}{\sqrt{24{,}75}}\right) =$

$= 1 - \Phi(1{,}01) \approx 0{,}156$
tabell 1

Med halvkorrektion $1 - \Phi\left(\frac{50{,}5-45}{\sqrt{24{,}75}}\right) \approx 1 - \Phi(1{,}11)$

$\approx 0{,}134$ Exakt $\approx 0.135$.

26/ 2013 (8)

## Binomialfördelning

**Beteckning** $X \in \text{Bin}(n,p)$

**Förekomst** En händelse $A$ med $P(A) = p$ upprepas $n$ oberoende gånger. $X$ = Antalet gånger $A$ inträffar.

**Egenskaper**

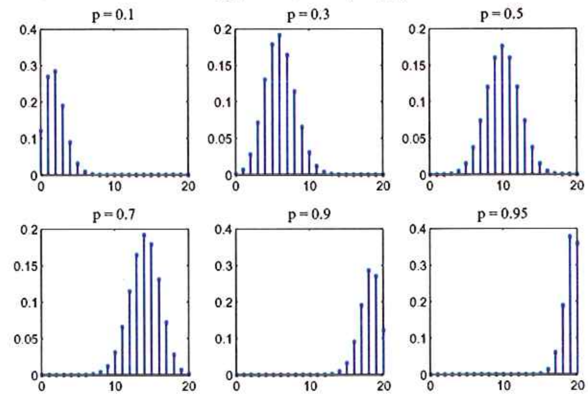
$$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n, \quad q = 1 - p$$

$$E(X) = np, \quad V(X) = npq$$

- $F_X(x)$ finns i tabell 6 för några värden på $n$ och $p$.
- Om $X \in Bin(n_1, p)$ och $Y \in Bin(n_2, p)$, ober. så är $X + Y \in Bin(n_1 + n_2, p)$
- Om $npq \geq 10$ är $X$ ungefär normalfördelad.
- Om $n \geq 10$ och $p \leq 0.1$ är $X$ ungefär Poissonfördelad.

F8 – 1

## Binomialfördelning, $X \in Bin(20, p)$




F8 – 2

## Väntevärde och varians för $Bin(n,p)$

Låt $Y_i \in Bin(1,p)$, dvs $p_{Y_i}(0) = 1 - p$ och $p_{Y_i}(1) = p$. Då blir

$$E(Y_i) = \sum_k k p_{Y_i}(k) = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p$$

$$E(Y_i^2) = \sum_k k^2 p_{Y_i}(k) = 0^2 \cdot (1-p) + 1^2 \cdot p = p$$

$$V(Y_i) = E(Y_i^2) - E(Y_i)^2 = p - p^2 = p(1-p)$$

Låt $X = \sum_{i=1}^{n} Y_i$, ($Y_i$ ober.) då är uppenbarligen $X \in Bin(n,p)$,

$$E(X) = E(\sum_{i=1}^{n} Y_i) = \sum_{i=1}^{n} E(Y_i) = np$$

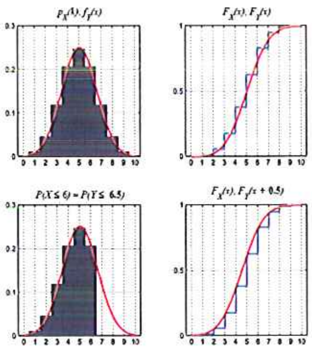
$$V(X) = V(\sum_{i=1}^{n} Y_i) = \sum_{i=1}^{n} V(Y_i) = np(1-p)$$

Detta motiverar även normalapproximation då $n$ är stor samt additionsegenskapen hos binomialfördelningen.

F8 – 3

## Halvkorrektion vid N-approx av diskret s.v.

$X \in Bin(10, 0.5)$, $Y \in N(5, \sqrt{2.5})$



F8 – 4

## Poissonfördelning

**Beteckning** $X \in \text{Po}(\mu)$

**Egenskaper**

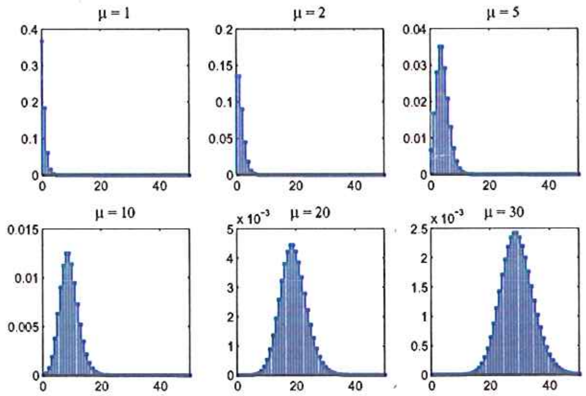
$$p_X(k) = e^{-\mu} \cdot \frac{\mu^k}{k!} \quad k = 0, 1, \ldots$$

$$E(X) = \mu, \quad V(X) = \mu$$

- $F_X(x)$ finns i tabell 5 för några värden på $\mu$.
- Om $X \in Po(\mu_1)$ och $Y \in Po(\mu_2)$, ober. så är $X + Y \in Po(\mu_1 + \mu_2)$
- Om $\mu \geq 15$ är $X$ ungefär normalfördelad.

F8 – 5

## Poissonfördelning, $X \in Po(\mu)$




F8 – 6

## Stokastisk process

- En *stokastisk process* $\{X(t), t \in T\}$ är en följd av stokastiska variabler, en "slumpmässig funktion av $t$".
- För ett fixt $t$ är $X(t)$ en stokastisk variabel.
- Beroende på vilka värden $X(t)$ och $t$ kan anta har vi följande fyra kombinationer

| *Process* \ *Tid* | Diskret | Kontinuerlig |
|---|---|---|
| Diskret | | |
| Kontinuerlig | | |

F8 – 7

En stokastisk process $\{X(t); t \in T\}$ har

- *Oberoende ökningar* om
  $$X(t_2) - X(t_1),\ X(t_3) - X(t_2), \ldots, X(t_n) - X(t_{n-1})$$
  är oberoende för alla $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ i $T$.
- *Stationära ökningar* om fördelningen för $X(t+h) - X(t)$ inte beror av $t$ utan bara av $h$.

### Intensitet

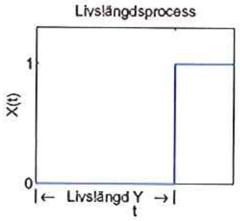
Intensiteten $\lambda_X(t)$ för en positiv s.v. $X$

$$\lambda_X(t) = \frac{f_X(t)}{1 - F_X(t)}, \quad t > 0$$

$\lambda(t)$ är relaterad till $X$ fördelningen genom $F_X(t) = 1 - \exp(-\int_0^t \lambda(x)dx)$, $t > 0$

## Livslängdsprocess

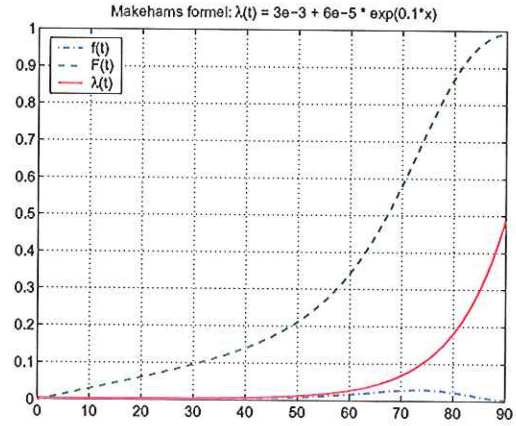
En livslängdsprocess är en växande diskret s.p. $X(t), t \geq 0$ som antar värdena 0: "Lever" och 1: "Död".




$X(t)$ och $Y =$ "Livslängden" är relaterade genom

$$P(X(t) = 0) = P(Y > t) = 1 - F_Y(t)$$
$$P(X(t) = 1) = P(Y \leq t) = F_Y(t)$$








## Poissonprocess

En *poissonprocess* med intensiteten $\lambda$ är en diskret s.p. med kontinuerlig tid $\{X(t), t \geq 0\}$ med följande egenskaper

- Antalet ökningar i icke överlappande intervall är oberoende.
- $X(t) \in Po(\lambda \cdot t)$
- $X(t) - X(s) \in Po(\lambda(t - s)), \quad 0 < s < t$
- Tiden $Y$ mellan ökningarna är $Y \in Exp(\lambda)$



## Realisering av poissonprocess, $X(t) \in Po(\lambda t)$

- Processen startar med värdet 0 då $t = 0$, dvs $X(0) = 0$
- Tidsavstånden mellan processens ökningar är $Exp(\lambda)$-fördelade.