# Föreläsning 7

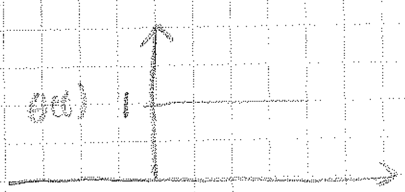
Föreläsning 6 (fort.)

| System S | Systems svar på insignal $w(t)$ dvs $S(w(\tau))(t)$ |
|---|---|
| L | $\int_{-\infty}^{\infty} k(t,\tau)w(\tau)\,d\tau$ |
| LTI | $\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)w(\tau)\,d\tau = h * w(t)$ |
| LTI och IU-stabil | $h * w(t)$ med $\int_{-\infty}^{\infty} \lvert h(t)\rvert\,dt < \infty$ |
| LTI och kausalt | $h * w(t)$ med kausalt $h$ dvs $h(t) = 0$ då $t < 0$ |

Anm. $h(t) = S(\delta(\tau))(t)$

$\underline{\delta(t) = \theta'(t)}$ $\quad \big(\underbrace{S(\theta(\tau))(t)}_{\text{stegsvar}}\big)'$

$\theta(t)$ 1



Ex 6.5 Om $S$ har impulsvar $h(t) = t\,\theta(t)$ så gäller

① $S$ har $h(t) \Rightarrow S$ är L.T.I.

② $\int_{-\infty}^{\infty} \lvert h(t)\rvert\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \lvert t\theta(t)\rvert\,dt = \int_{0}^{\infty} t\cdot 1\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\infty} = \infty$

$\Rightarrow S$ är inte SU-stabil

③ $h(t)$ är kausal $\Rightarrow S$ är kausalt

④ $S(\theta(t))(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)\theta(\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} (t-\tau)\theta(t-\tau)\,\theta(\tau)\,d\tau$

$\underset{\text{vara över } t}{\overset{\tau \text{ får inte}}{=}} \int_{-\infty}^{t} (t-\tau)\cdot 1\cdot \theta(\tau)\,d\tau \overset{\tau \le t < 0}{=} \begin{cases} 0, & \text{då } t < 0 \\ \int_0^t (t-\tau)\cdot 1\cdot 1\,d\tau & \text{då } t > 0 \end{cases}$

$= \begin{cases} 0, & \text{då } t < 0 \\ t^2 - \frac{t^2}{2}, & \text{då } t > 0 \end{cases}$ $\quad$ kan skrivas $\frac{t^2}{2}\theta(t)$

$f(t)$: $0$ $\quad \frac{t^2}{2}$ $\quad 0 \quad t$

$f(t) = 0 + \frac{t^2}{2}\big(\theta(t-0) - \underbrace{\theta(t-\infty)}_{=0}\big) = \frac{t^2}{2}\theta(t)$

⑤ $(VL)' = \left(\frac{t^2}{2}\theta(t)\right)' = h(t)$

Sats 6.5 (s.120)

Systemet $w(t) \xrightarrow{S} y(t)$ som bestäms av

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} w(t) \\ y(t) = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \\ y(t_0) = 0 \end{cases}$$

← konstantvektorer

$y(t_0) = 0$ ← för att S blir kausalt

är LTI och kausalt med impulssvaret $h(t) = \underbrace{\left(\underset{1\times 2}{C}\,\underset{2\times 2}{e^{tA}}\,\underset{2\times 1}{B}\right)}_{1\times 1}\theta(t)$

Föreläsning 7

10.1 - 10.4

Def 7.1 (s. 125)

Faltningen av två funktioner $f(t)$ och $g(t)$ i $\mathbb{R}$ är $f * g(t)$

$\stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)\, g(\tau)\, d\tau$ om integralen existerar

Ex 7.1

$$\theta * \theta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \theta(t-\tau)\,\theta(\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{t} 1\cdot\theta(\tau)\, d\tau = \begin{cases} 0, & t<0 \\ \int_0^t 1\cdot 1\, d\tau = t, & t\geq 0 \end{cases}$$

$= t\,\theta(t)$

Sats $\theta * \theta(t) = t\,\theta(t)$

Ex 7.2

$$\left(e^{-t}\theta(t)\right) * \left(2\theta(t)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t-\tau)}\,\theta(t-\tau)\cdot 2\theta(\tau)\, d\tau$$

$$= 2e^{-t}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau}\,\theta(t-\tau)\,\theta(\tau)\, d\tau \qquad \theta(t-\tau) = \begin{cases} 0, & \tau > t \\ 1, & \tau < t \end{cases}$$

$$= 2e^{-t}\int_{-\infty}^{t} e^{\tau}\cdot 1\cdot\theta(\tau)\, d\tau$$

$$= 2e^{-t}\begin{cases} 0, & t<0 \\ \int_0^t e^{\tau}\cdot 1\, d\tau = e^{t}-1, & t\geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & t<0 \\ (2-2e^{-t})\theta(t) \end{cases}$$

Ex 7.3 $\quad 1 * 2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot 2 \, d\tau = \infty$ existerar ej

Vilka funktioner får faltas?

Sats 7.1 (s 186)

① $f(t), g(t) \in L_1 \overset{def}{=} \left\{ h(t) : \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| \, dt \text{ och } \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \, dt \text{ existerar ändligt} \right\}$

$\Rightarrow f * g(t)$ existerar och ligger i $L_1$.

② $f(t), g(t)$ är kausala $\Rightarrow f * g(t)$ existerar och är kausal

Sats 7.2 (s 188)

För dessa funktioner i ① och ② gäller

① $f * g = g * f$
② $f * (g + h) = f * g + f * h$
③ $(f * g) * h = f * (g * h)$

$*$ fungerar som gånger mellan tal

④ $(f * g)' = f' * g = f * g'$
⑤ $(T_a f) * g = f * (T_a g) = T_a (f * g)$

$T_a f(t) \overset{def}{=} f(t - a)$

Bevis ① $f * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau) g(\tau) \, d\tau \quad \frac{\tau_1 = t - \tau}{d\tau_1 = -d\tau} \quad \int_{\infty}^{-\infty} f(\tau_1) g(t - \tau_1)(-1) \, d\tau_1$

$= \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau_1) f(\tau_1) \, d\tau_1 = g * f(t)$

Ex 7.9 (s 191)

$f(t) = \theta(t) - \theta(t - a) = \theta - T_a \theta$

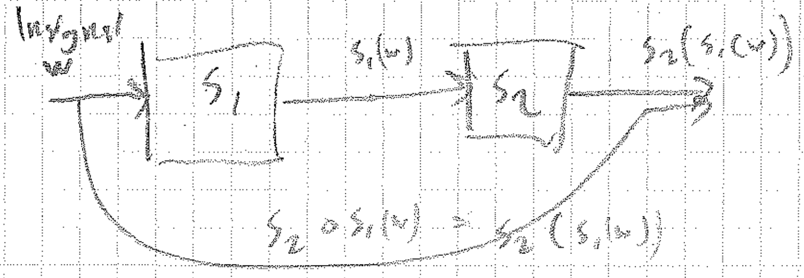
$g(t) = \theta(t) - \theta(t - b) = \theta - T_b \theta$

$\Rightarrow f * g(t) = (\theta - T_a \theta) * (\theta - T_b \theta) = \theta * \theta - \theta * T_b \theta - (T_a \theta) * \theta + T_a \theta * T_b \theta$

$\underline{\theta * \theta = t\theta(t)}$ $\quad t\theta(t) - T_b(t\theta(t)) - T_a(t\theta(t)) + \underbrace{T_a T_b}_{T_{a+b}}(t\theta(t))$

$= t\theta(t) - (t - b)\theta(t - b) - (t - a)\theta(t - a) + (t - a - b)\theta(t - a - b)$

## W.5 Seriekoppling av system (sammansatta system)




<u>Sats 7.3</u> (s 193)

$S_1$ och $S_2$ är LTI med impulssvaren $h_1(t)$ och $h_2(t)$

$\Rightarrow$ $S_2 \circ S_1$ är LTI med impulssvaret

$$h(t) = h_1 * h_2(t)$$

<u>Bevis</u>

$$S_2 \circ S_1(w) = S_2(S_1(w)) = S_2(h_1 * w) = h_2 * (h_1 * w)$$
$$= (h_2 * h_1) * w$$

$\Rightarrow$ $S_2 \circ S_1$ är LTI med $h = h_2 * h_1$

## <u>W.6</u>

<u>Sats 7.4</u> (s 195) $S$ är LTI $\Rightarrow$ Impulssvaret

$$h(t) = S(\delta) = \left(S(\theta)(t)\right)'$$

<u>Bevis</u> $h(t) = S(\delta) \overset{LTI}{=} h * \delta \overset{\delta = \theta'}{=} h * \theta' = (h * \theta)'$
$$= (S(\theta))'$$