22/2-2013. # Normalfördelning.

(7). En stokastisk variabel Y med ~~$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$~~

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{alla } y, \text{ kallas}$$

normalfördelad med parametrarna μ och σ
$Y \in N(\mu, \sigma)$
Sätter vi $\mu = 0$, $\sigma = 1$, fås en

Standardiserad Normalfördelning

$X \in N(0,1)$, $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ alla x.
för $X \in N(0,1)$ inför vi

$$\varphi(x) = f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$
$$\Phi(x) = F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(x)\,dx$$

$\Phi(x)$ kan ej räknas ut analytiskt, ta numerisk metod m.h.a. dator eller Tabell 1.

Ex) $X \in N(0,1)$ Beräkna.

a) $P(X \le 0.42) = \left(\int_{-\infty}^{0.42} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\,dx\right) = F_X(0.42) =$
$= \Phi(0.42) \underset{\text{Tabell 1.}}{\approx} 0.6628$

b) $P(-1 \le X \le 2) = \Phi(2) - \Phi(-1) = \Phi(2) - (1 - \Phi(1)) =$
$= \Phi(2) + \Phi(1) - 1 \underset{\text{Tabell 1.}}{=} 0.9725 + 0.8413 - 1 = 0.8186$

Är arean under tätheten 1?

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = I$$

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,dx\,dy = \{\text{pol. koord. } x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ |J| = r\} =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{r=0}^{\infty}\int_{\theta=0}^{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2}}\, r\,d\theta\,dr = 2\pi/2\pi \left[-e^{-\frac{r^2}{2}}\right]_0^{\infty} = 1$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[-e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_{-\infty}^{\infty} = 0.$$

$$E(X^2) \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \left[-x e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} = 1.$$

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 1 - 0 = 1.$

Allmän Normalfördelning.

$X \in N(0,1)$ sätt $Y = \sigma X + \mu$. Y fördelningsfunk. blir:
$F_Y(y) = P(\sigma X + \mu \le y) = P(X \le \frac{y-\mu}{\sigma}) =$
$F_X(\frac{y-\mu}{\sigma})$

$$f_Y(y) = f_X\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right) \cdot \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sigma} e^{-\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2/2} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \text{ alla } y.$$

dvs. ~~$Y \in N(0,1)$~~ $Y \in N(\mu, \sigma)$
$E(Y) = E(\sigma X + \mu) = \sigma E(X) + \mu = \mu$
$V(Y) = V(\sigma X + \mu) = \sigma^2 \underbrace{V(X)}_{=1} = \sigma^2$
Dessutom $X = \frac{y-\mu}{\sigma} \in N(0,1)$.

Ex) $X \in N(3,2)$ Ber.
$P(X > 1) = 1 - P(X \le 1) = 1 - P\left(\underbrace{\frac{X-3}{2}}_{\in N(0,1)} \le \frac{1-3}{2}\right)$ Standardisera
$= 1 - \Phi\left(\frac{1-3}{2}\right) = 1 - \Phi(-1) = \Phi(1) \underset{\text{T.1.}}{=} 0.8413.$

Vad är ~~chansen att~~ $P(X > 2Y)$ om $X \in N(0,3)$ o. $Y \in N(1,2)$ ober.

Allmänt $P(X > 2Y) = \iint_{x > 2y} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$

Men. $P(X > 2Y) = P(X - 2Y > 0)$ och.
$X - 2Y \in N(E(X-2Y), D(X-2Y))$
$E(X-2Y) = E(X) - 2E(Y) = 0 - 2 \cdot 1 = -2.$
$V(X-2Y) = V(X) + (-2)^2 V(Y) = 3^2 + 4 \cdot 2^2 = 25.$
$D(X-2Y) = \sqrt{25} = 5$
dvs $X - 2Y \in N(-2, 5)$
$P(X > 2Y) = P(X - 2Y > 0) = 1 - P(X - 2Y < 0) =$
$= 1 - P\left(\underbrace{\frac{X - 2Y - (-2)}{5}}_{\in N(0,1)} < \frac{0-(-2)}{5}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{0-(-2)}{5}\right) = 1 - \Phi(2/5)$
$\approx 0.3446.$

Ex. Sten, sax och påse {~~P3~~ F7-6}
Låt X_i vara Lisas vinst i spelomgång i.

k	-1	0	1
$p_{X_i}(k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

$E(X_i) = \sum_k k\, p_X(k) = -1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} = 0.$

~~$V(X_i)$~~ $E(X_i^2) = \sum_k k^2 p_X(k) = (-1)^2 \cdot \frac{1}{3} + 0^2 \cdot \frac{1}{3} + 1^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$
Låt Y vara Lisas totala vinst efter 50 spel
$Y = \sum_{i=1}^{50} X_i$, enligt CGS: $Y \overset{\approx}{\in} N(E(Y), D(Y))$
$E(Y) = E(\sum_1^{50} X_i) = \sum_1^{50} E(X_i) = 50 \cdot 0 = 0.$
$V(Y) = V(\sum_1^{50} X_i) = \sum_1^{50} 1^2 V(X_i) = 50 \cdot \frac{2}{3} = \frac{100}{3}$
$D(Y) = \frac{10}{\sqrt{3}}.$

~~$P(Y \ge 5) = 1 - P(Y < 5) \approx 1 - \Phi\left(\frac{5-0}{10/\sqrt{3}}\right) \approx$~~
~~$1 - \Phi(0.87) \approx 0.19$~~
~~$P(Y \ge 5) = 1 - P(Y \le 4) \approx 1 - \Phi\left(\frac{4-0}{10/\sqrt{3}}\right) \approx 0.245$~~

$$1 - \Phi\left(\frac{4.5 - 0}{10/\sqrt{3}}\right) \approx 0.22.$$

22/2 2015

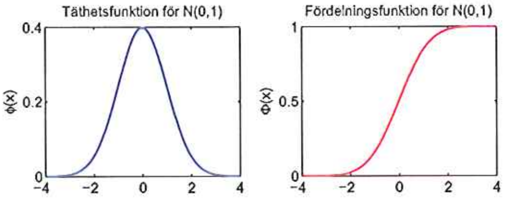
7

Standardiserad normalfördelning

$X \in N(0,1)$, $E(X) = 0$, $V(X) = 1$, $x_\alpha \equiv \lambda_\alpha$

$$\begin{cases} f_X(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \equiv \varphi(x) \\ F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\, dt \equiv \Phi(x) \end{cases}$$

$\Phi(x)$ räknas ut numeriskt eller tabell (1).



Allmän normalfördelning

$X \in N(\mu,\sigma)$, $E(X) = \mu$, $V(X) = \sigma^2$

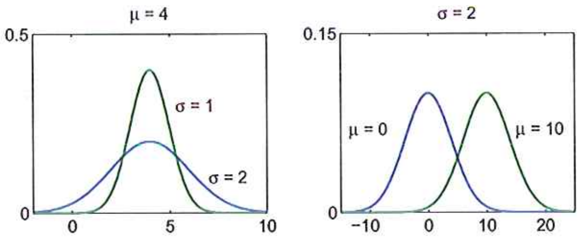
Sats: $\boxed{\dfrac{X-\mu}{\sigma} \in N(0,1)}$

$$\boxed{f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}}$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt = \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$$

$$x_\alpha = \mu + \sigma\lambda_\alpha$$

thetsfunktioner för några normalfördelningar



Linjärkombinationer av normalfördelningar

Linjärkombinationer av normalfördelade s.v. är normalfördelade.

Dvs. Om $X_i \in N(\mu_i, \sigma_i)$ och $Y = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$ gäller

$$Y \in N(E(Y), D(Y)) \iff$$

$$Y \in N\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\mu_i, \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2\sigma_i^2}\right)$$

om alla X_i är oberoende av varandra

Centrala gränsvärdessatsen[a], CGS

Summa av oberoende likafördelade s.v. är ungefär normalfördelad om antalet termer är "stort". Med $E(X_i) = \mu$, $V(X_i) = \sigma^2$ fås

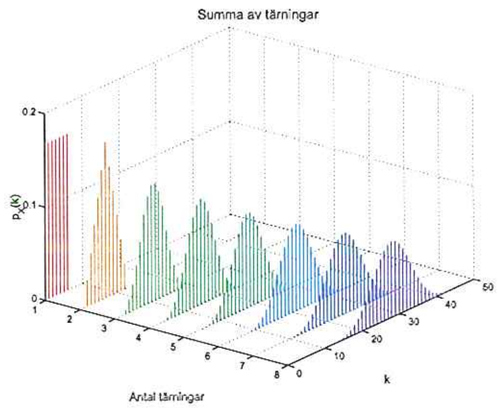
Fx Om $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ gäller

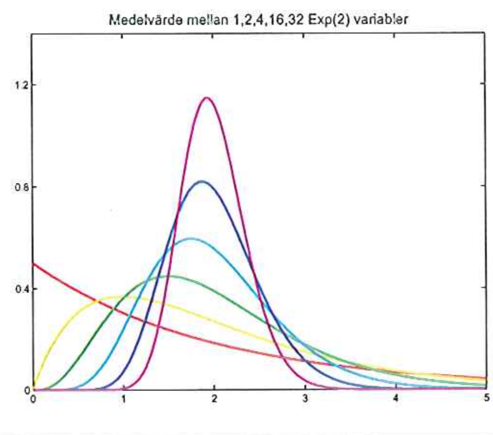
$$Y \underset{\sim}{\in} N(n\mu, \sigma\sqrt{n})$$

Ex Om $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ gäller

$$\bar{X} \underset{\sim}{\in} N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

[a] eller snarare den praktiska tolkningen av den





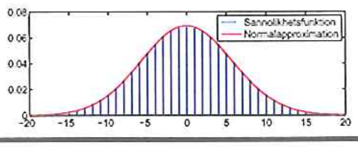
Ex. Sten, sax och påse

Per och Lisa spelar sten, sax och påse. Vinnaren får en krona av förloraren, vid oavgjort händer inget. Antag att det är samma sannolikhet för vinst, oavgjort och förlust.

a) Bestäm fördelningen för Lisas vinst i en spelomgång.

b) Beräkna väntevärde och varians för Lisas vinst i en spelomgång.

c) Vad är sannolikheten att Lisa totalt vunnit minst 5 kr efter 50 spelomgångar?



Ex. Äpplen

Tag 25 äpplen från ett äppelträd. Låt X_i vara vikten av äpple nr i. Vad är slh att den sammanlagda vikten överstiger 3 150 g om $E(X_i) = 120$ g och $V(X_i) = 400$ g^2?

Lsg. Sätt Y = sammanlagd vikt $= \sum_{i=1}^{25} X_i$. Enligt CGS är Y ungefär normalfördelad (om 25 är stort); $Y \underset{\sim}{\in} N(E(Y), D(Y))$.

$$E(Y) = E(\sum X_i) = \sum E(X_i) = 25 \cdot 120 = 3\,000 \text{ g}$$
$$V(Y) = V(\sum X_i) = \sum 1^2 V(X_i) = 25 \cdot 400 = 10\,000 \text{ g}^2$$
$$D(Y) = 100 \text{ g}$$

Dvs $Y \underset{\sim}{\in} N(3\,000, 100)$.

$$P(Y > 3\,150) = 1 - P(Y \le 3\,150) \approx 1 - \Phi(\frac{3\,150 - 3\,000}{100}) =$$
$$= 1 - \Phi(1.5) \approx 1 - 0.933 \approx 0.07$$

Centrala gränsvärdessatsen

Låt $X_1, X_2, \ldots, X_n$ vara oberoende stokastiska variabler med samma fördelning och $E(X_i) = \mu$, $V(X_i) = \sigma^2$ (ändliga). Då gäller CGS:

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \le a\right) \to \Phi(a) \text{ då } n \to \infty \text{ för alla } a$$

observera att bråket i sannolikheten hela tiden har väntevärde noll och varians ett.