7/2 2012 (7)

Rep. H linjärt rum $u, v \in H$ $u+v$, $\lambda \in \mathbb{R}$ λu $(\lambda \in \mathbb{C})$

Skalärprodukt $(u|v), (u,v), u\cdot v, \langle u,v\rangle$

I) $u\cdot(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1(u\cdot v_1) + \lambda_2(u \cdot v_2)$

II) $u\cdot v = \overline{v\cdot u}$

III) $u \cdot u \geq 0$, $u\cdot u = 0 \Leftrightarrow u = \bar{0}$

H linjärt rum + skalärprodukt $\Rightarrow$ H pre-Hilbertrum (skalärproduktsrum)

norm (längd)

$\|u\| = \sqrt{(u\cdot u)}$

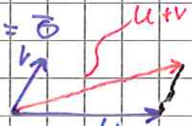
$\|2u\| = \sqrt{(2u)(2u)} = \sqrt{4(u\cdot u)} = 2\|u\|$

norm ska uppfylla

I) $\|u\| \geq 0$, $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = \bar{0}$

II) $\|\lambda u\| = |\lambda|\,\|u\|$

III) $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$



$u, v \in H$, u, v ortogonala $u \perp v$ om $u\cdot v = 0$

Pythagoras Sats

$u, v \in H$ $u \perp v$

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

Bevis: $\|u+v\|^2 = (u+v)\cdot(u+v) = u\cdot u + u\cdot v + v \cdot u + v\cdot v = \|u\|^2 + 0 + 0 + \|v\|^2$

Ex) Skalärproduktsrum $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$

$(1,2,3)\cdot(1,0,-1) = 1\cdot 1 + 2\cdot 0 + 3\cdot(-1) = -2$

Ω delmängd av $\mathbb{R}^n$

$C(\Omega;\mathbb{R}) = \{$Kontinuerliga funktioner$: \Omega \to \mathbb{R}\}$

Skalärprodukt $u\cdot v = \int_\Omega \overline{u(x)}\, v(x)\,dx$, uppfyller ovanstående kriterier för skalärprodukt.

Ex) w funktion, $w(x) > 0$ viktfunktion

$L_2(w,\Omega)$ funktionen sådan att

$\int_\Omega |u(x)|^2 w(x)\,dx$ är konvergent.

Om $w(x) = 1$ $L_2(w,\Omega) = L_2(\Omega)$

Ex) $L_2([0,2\pi])$ $e^{ikx}, e^{ilx} \in L_2([0,2\pi])$

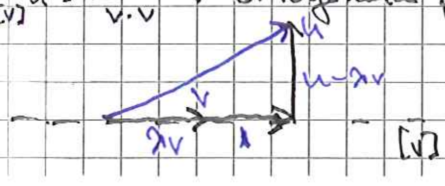
$\int_0^{2\pi} |e^{ikx}|^2 dx = \int_0^{2\pi} 1\,dx = 2\pi$, konvergent.

$e^{ikx}\cdot e^{ilx} = \int_0^{2\pi} \overline{e^{ikx}}\, e^{ilx}\,dx = \int_0^{2\pi} e^{-ikx} e^{ilx}\,dx = \int_0^{2\pi} e^{i(l-k)x}\,dx$

$= \left[\dfrac{e^{i(l-k)x}}{i(l-k)}\right]_0^{2\pi} = \dfrac{1-1}{i(l-k)} = 0.$ $l \neq k$

$u, v \in H$

$P_{[v]}u = \dfrac{v\cdot u}{v \cdot v} v$ ortogonala projektioner



$u - \dfrac{v\cdot u}{v\cdot v} v$ är vinkelrät mot v ty

$\left(\left(u - \dfrac{v\cdot u}{v\cdot v} v\right)\cdot v\right) = u\cdot v - \dfrac{v\cdot u}{v\cdot v} v\cdot v = u\cdot v - v\cdot u$ ..

Liknande räkning ger

Schwarz, Cauchy-Schwarz, Cauchy-Bunyakovski

H $\boxed{|u\cdot v| \leq \|u\|\,\|v\|}$

Bevis

$v \neq 0$ $0 \leq \left\|u - \dfrac{v\cdot u}{v\cdot v}\cdot v\right\|^2 = \left(u - \dfrac{v\cdot u}{v\cdot v}\cdot v\right)\cdot\left(u - \dfrac{v\cdot u}{v\cdot v} v\right) =$

$= \left(u - \dfrac{v\cdot u}{v\cdot v}\cdot v\right)\cdot u - \underbrace{\left(u - \dfrac{v\cdot u}{v\cdot v}\cdot v\right)\cdot\left(\dfrac{v\cdot u}{v\cdot v} v\right)}_{=0} =$

$= (u\cdot u) - \dfrac{v\cdot u}{v\cdot v}(v\cdot u) = \dfrac{\|u\|^2\|v\|^2 - |v\cdot u|^2}{\|v\|^2}$

Kan nu visa triangelolikheten

för $\|u\| = \sqrt{u\cdot u}$

$\|u+v\|^2 = (u+v)\cdot(u+v) = (u\cdot u) + (u\cdot v) + (v\cdot u) + (v\cdot v) =$

$= \|u\|^2 + 2(u\cdot v) + \|v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 =$

$= (\|u\| + \|v\|)^2$

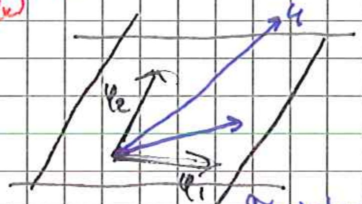
Låt $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ vara parvis ortogonala vektorer i H $(\varphi_i \neq 0)$

Sätt $M = [\varphi_1, \ldots, \varphi_n]$ $v \in M$

$v = \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k$

$u \in M$ Den ortogonala projektionen av u på M

$$P_M[u] = \sum_{k=1}^n \frac{(\varphi_k|u)}{(\varphi_k\cdot\varphi_k)}\varphi_k$$



Ex) $L_2([0,2\pi])$ $\varphi_k = e^{ikx}$ $k = 0, \pm 1, \pm 2$ parvis ortogonala

Fourierkoeff. för u.

$(\varphi_k\cdot u) = \int_0^{2\pi} \overline{e^{ikx}}\, u(x)\,dx = \int_0^{2\pi} e^{-ikx} u(x)\,dx = 2\pi c_k(u)$

$\varphi_k\cdot\varphi_k = \int_0^{2\pi} \overline{e^{ikx}}\, e^{ikx}\,dx = \ldots = 2\pi$

$P_M u = \sum_{k=0}^n \dfrac{2\pi c_k}{2\pi}\varphi_k = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}.$

Projektionssatsen

$\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ parvis ortogonala

$M = [\varphi_1 \ldots \varphi_n]$

För varje $u \in H$

I) $P_M u \in M$

II) $u - P_M u \perp M$ $(u - P_M u, v) = 0$ $v \in M$

III) $\inf_{v\in M} \|u - v\|^2 = \|u - P_M u\|^2$

Har vi uppsättning vektorer $u_1, \ldots, u_n$ kan vi alltid välja $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ parvis ortogonala:

$[\varphi_1, \ldots, \varphi_n] = [u_1, \ldots, u_n]$

Metod: Gram-Schmidt

$\varphi_1 = u_1$

$\varphi_2 = u_2 - P_{[\varphi_1]} u_2$

$\varphi_3 = u_3 - P_{[\varphi_2]} u_3$

$\varphi_4 = u_4 - P_{[\varphi_3]} u_4$

Ex| $u_0(x) = 1$, $u_1(x) = x$, $u_2(x) = x^2$.

$M = L_2([-1,1])$

$\varphi_0 = u_0 = 1$.

$$\varphi_1 = u_1 - P_{[\varphi_0]} u_1 = u_1 - \frac{\overbrace{(\varphi_0 \cdot u_1)}^{=0}}{\underbrace{(\varphi_0 \cdot \varphi_0)}_{=2}} u_1 = u_1.$$

$$\varphi_0 \cdot u_1 = \int_{-1}^{1} x \, dx = 0 \qquad \varphi_1 = x.$$

$$\varphi_0 \cdot \varphi_0 = \int_{-1}^{1} 1 \cdot dx = 2.$$

$$u_2 = u_2 - P_{[\varphi_0, \varphi_1]} u_2 = \ldots$$