# Föreläsning 6

9.5–9.13 Systemet $S$ är linjärt $\Leftrightarrow$ $S(c_1w_1 + c_2w_2) = c_1S(w_1) + c_2S(w_2)$

gäller för alla tal $c_1, c_2$ och alla insignaler $w_1, w_2$

Ex 6.1 Systemet $\mathcal{L}(w(\tau))(t) \overset{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t\tau} w(\tau)\,d\tau$ är linjärt ty

$$\mathcal{L}(c_1w_1(\tau) + c_2w_2(\tau)) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t\tau}(c_1w_1(\tau) + c_2w_2(\tau))\,d\tau$$

$$= c_1\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t\tau} w_1(\tau)\,d\tau + c_2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t\tau} w_2(\tau)\,d\tau$$

$$= c_1\mathcal{L}\{w_1(\tau)\} + c_2\mathcal{L}(w_2(\tau))$$

$\therefore$ $\mathcal{L}$ är linjärt

Allmänt gäller

Sats 6.1 (s. 167) $S$ är linjärt $\Leftrightarrow$ Det finns en "generaliserad funktion" $k(t,\tau)$

så att $S(w(\tau))(t) = \int_{-\infty}^{\infty} k(t,\tau)w(\tau)\,d\tau$

för alla insignaler $w(\tau)$.

Där $k(t,\tau)$ kallas systemets impulssvar.

Ex 6.2 Problemet $\begin{cases} x' = 2x + w(t) \\ x(0) = 2 \end{cases}$ definierar ett system $x(t) = S(w(\tau))(t)$

Bestäm systemets impulssvar

Lösn: Vi vet att problemet har lösningen

$$x(t) = e^{2t}\int_0^t e^{-2\tau} w(\tau)\,d\tau = \int_0^t e^{2(t-\tau)} w(\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} k(t,\tau)w(\tau)\,d\tau, \text{ ty}$$

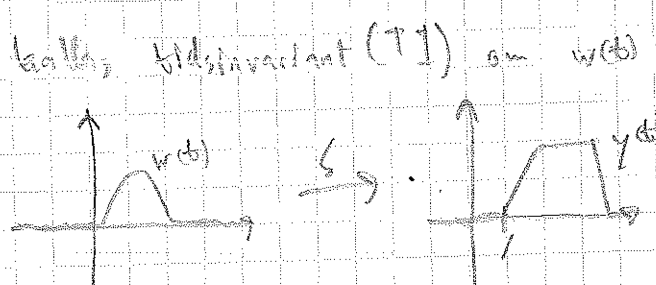
$$\therefore k(t,\tau) = \begin{cases} e^{2(t-\tau)} & \text{då } 0 < \tau < t \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

$\therefore$ Systemet $S$ är linjärt med impulssvaret $k(t,\tau)$.

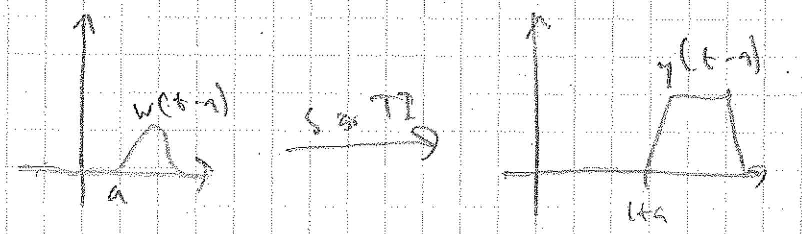
Def 6.2 (s. 169) $S$ kallas tidsinvariant (TI) om $w(t) \xrightarrow{S} y(t)$ medför att $w(t-a) \xrightarrow{S}$

för alla tal $a$

Om




så är




## Ex 6.3

Systemet i Ex 6.2 har impulssvaret $k(t,\tau) = \begin{cases} e^{2(t-\tau)}, & 0<\tau<t \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$

beror bara på $t-\tau$ och alltså kan uttryckas som $h(t-\tau)$ som gör ett TI system, by nästa satsen

**Sats 6.1** (s. 170)

$S$ är LTI $\Leftrightarrow$ $S$ har impulssvaret $k(t,\tau) = h(t-\tau)$, dvs det finns en variabel generaliserad funktion $h(x)$ så att $S(w(\tau))(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)w(\tau)\,d\tau$ för alla insignaler $w(t)$.

**Bevis** "$\Leftarrow$" Antag att $w(\tau) \xrightarrow{S} y(t)$ så att $y(t) = S(w(\tau))(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)w(\tau)\,d\tau$ så är $S(w(\tau-a))(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)w(\tau-a)\,d\tau$

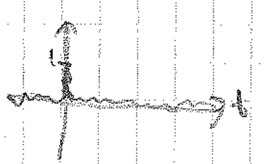
$\tau_1 = \tau - a$, $d\tau_1 = d\tau$: $\int_{-\infty}^{\infty} h(t-(\tau_1+a))w(\tau_1)\,d\tau_1 = \int_{-\infty}^{\infty} h((t-a)-\tau_1)w(\tau_1)\,d\tau_1$

$= S(w(\tau_1))(t-a)$

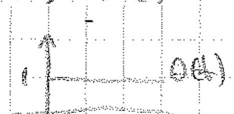
dvs $w(t-a) \xrightarrow{S} y(t-a)$ för alla $a$ som gör $S$ är TI

"$\Rightarrow$" Vi börjar med Deltafunktion (Diracmått) $\delta(t)$:

$\delta(t)$ bara har positiv massa 1 i origo.




$\theta'(t) = \delta(t)$



Egenskap (s 203)

① $\int_{\{0\}} \delta(t)\,dt = 1$ och

$\int_I \delta(t)\,dt = 0$ om $I$ $0 \notin I$ ← ett intervall

② $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)\,dt = f(0)$

③ $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-a)\,dt = f(a)$ för varje tal $a$.

Antag att $S$ är LTI så är $S(u(\tau))(t) = \int_{-\infty}^{\infty} k(t,\tau)u(\tau)\,d\tau$

speciellt för insignalen $\delta(t)$ gäller $S(\delta(\tau))(t) = \int_{-\infty}^{\infty} k(t,\tau)\delta(\tau)\,d\tau$

$= k(t,0)$ dvs $\delta(t) \xrightarrow{S} k(t,0)$

Analogt $\delta(t-a) \xrightarrow{S} k(t,a)$

Men $S$ är TI ger $\delta(t-a) \xrightarrow{S} k(t-a,0)$

$\therefore$ $k(t,a) = k(t-a,0)$ för alla $a$

som beror bara på $t-a$, och kan uttryckas av $h(t-a)$

Beviset ger

**Sats** $S$ är LTI $\Rightarrow h(t) = S(\delta(\tau))(t)$ som (slarvigt) kallas impulssvaret av $S$.

Obs $h(t-\tau)$ är impulssvaret till LTI system

**Def 6.3** (s 173) $S$ kallas insignal-utsignal stabil (IU-stabil) om $u(\tau)$ är begränsad $\Rightarrow S(u(\tau))(t)$ är begränsad

**Sats 6.3** (s 173)

Antag att $S$ är LTI. Så gäller $S$ är IU-stabil

$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,dt < \infty$

**Ex 6.4** Systemet $S$ har impulssvaret $h(t) = e^{-t}\theta(t)$, ty

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t}\theta(t) \;\underline{\underline{\text{se definitionen av } \theta(t)}}\; \int_0^{\infty} e^{-t}\cdot 1\,dt = \left[\frac{e^{-t}}{-1}\right]_0^{\infty} = 1 < \infty$$

som ger att $S$ är IU-stabil

**Def 6.4** (s 177)

$S$ kallas kausalt om för varje $t_0$ gäller

(*) $w_1(t) = w_2(t)$ för $t < t_0$ kan medföra att $S(w_1(\tau))(t) = S(w_2(\tau))(t)$ för $t < t_0$

Obs För ett linjärt system $S$ kan villkoret ersättas av

$w(t) = 0$ för $t < t_0 \Rightarrow S(w(\tau))(t) = 0$ och $t < t_0$

**Sats 6.4** (s 177)

Antag att $S$ är LTI

Då gäller

$S$ är kausalt $\Leftrightarrow$ $h(t)$ är kausal, dvs $h(t) = 0$ då $t < 0$.

**Bevis**

"$\Rightarrow$" $S$ är kausalt

För insignalen $\delta(t)$ gäller $\delta(t) = 0$ då $t < 0$

$\therefore h(t) = S(\delta(\tau))(t) = 0$ för $t < 0$

och $h(t)$ är en kausal funktion.

"$\Leftarrow$" Antag att $h(t) = 0$ för $t < 0$

För en insignal $w(t)$ med $w(t) = 0$ för $t < t_0$

Så är $S(w(\tau))(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)w(\tau)\,d\tau \underset{\substack{h(t)=0 \\ \text{för } t<0}}{\overset{\text{ty}}{=}} \int_{-\infty}^{t} h(t-\tau)w(\tau)\,d\tau \;\underline{\underline{\text{då } t < t_0}}\; 0$