

Ex)  $X \in \exp(\lambda)$ , dvs.  $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} x^2$

$$\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} x^2 dx = \int_0^\infty \lambda x^2 f(x) dx = \int_0^\infty \lambda x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = \int_0^\infty \lambda^2 x^2 e^{-\lambda x} dx$$

$$= \lambda^2 \int_0^\infty x^2 e^{-\lambda x} dx = \lambda^2 \cdot \frac{2}{\lambda^3} = \frac{2}{\lambda}$$

$$\Rightarrow E(X) = \frac{2}{\lambda}$$

Beskriv  $E(X)$  och  $V(X)$  (en  $E(X^k)$ )

$$E(X) = \int_0^\infty x f(x) dx = \int_0^\infty x \lambda e^{-\lambda x} dx = \left[ \text{part. int.} \right]$$

$$= \left[ -x e^{-\lambda x} \right]_0^\infty + \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} dx = 0 + \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty \lambda^2 e^{-\lambda x} dx$$

$$= \frac{1}{\lambda} \cdot \int_0^\infty x^2 f(x) dx = \int_0^\infty x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = \int_0^\infty x^2 e^{-\lambda x} dx = -\infty$$

$$= 0 + \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty x \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda} E(X) = \frac{2}{\lambda}$$

$$E(X^2) = \dots = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{\lambda} \cdot E(X) = \frac{6}{\lambda}$$

$$E(X^k) = \frac{k!}{\lambda^k} E(X^{k-1}) = \frac{k!}{\lambda^k} \cdot \frac{(k-1)!}{\lambda^{k-1}} \cdot \dots \cdot E(X) =$$

$$= \frac{k!}{\lambda^k} \quad (\text{Fr: } \Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx, t > 0)$$

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

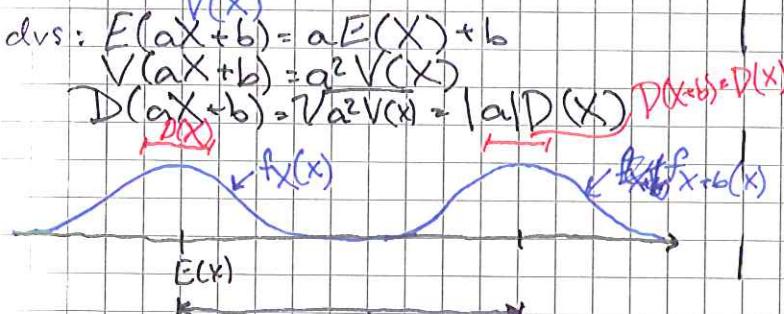
$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

Ni hade  $E(aX+b) = aE(X)+b$ .  
 Variansen blir  $V(X) = E[(X-E(X))^2]$

$$V(aX+b) = E[(aX+b-(a\mu+b))^2] =$$

$$= E[(ax-\alpha)^2] = E[a^2(X-\mu)^2] =$$

$$= a^2 E[(X-\mu)^2] = a^2 V(X)$$



Ex) Sämma  $E(X+Y) =$

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} (x+y) f_{XY}(x,y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x+y) f_{XY}(x,y) dx dy +$$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f_{XY}(x,y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y) dy:$$

$$= [E(X) + E(Y)]$$

Ex)  $f_{XY}(x,y) = 2, 0 \leq y \leq 1$   
 Bestäm  $C(X,Y) = E(X \cdot Y) - E(X)E(Y)$

$$= (X \cdot Y) = \iint_{\mathbb{R}^2} x \cdot y f_{XY}(x,y) dx dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^1 x \cdot y^2 dy dx = \int_0^1 x \cdot [y^3]_0^1 dx = \int_0^1 x^3 dx =$$

$$= \left[ \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y) dy dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x \int_0^{\infty} 2 dy dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot [2y]_0^{\infty} dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dx =$$

$$= [2 \cdot \frac{x^3}{3}]_0^{\infty} = \frac{2}{3}$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} y \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y) dx dy =$$

**Beroendemått****Kovarians,  $C(X, Y)$** 

$$C(X, Y) = E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\} = E(XY) - E(X)E(Y)$$

- Kovariansen anger hur mycket linjärt beroende som finns mellan  $X$  och  $Y$ .

- Ur definitionen får  $C(X, X) = V(X)$
- $X$  och  $Y$  oberoende  $\Rightarrow C(X, Y) = 0$
- Obs.  $C(X, Y) = 0 \neq X$  och  $Y$  oberoende

**Korrelationskoefficient,  $\rho, \rho_{X,Y}$** 

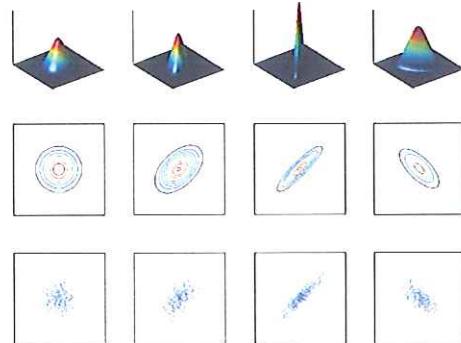
$$\rho_{X,Y} = \frac{C(X, Y)}{D(X)D(Y)}$$

- $-1 \leq \rho \leq 1$

F6 - 1

**Korrelation**

$$\rho = 0 \quad \rho = 0.5 \quad \rho = 0.9 \quad \rho = -0.7$$



F6 - 2

Se i inför, lösning till öv 2?**Räkneregler**

$$\left. \begin{array}{l} \bullet E(aX + b) = aE(X) + b \\ \bullet V(aX + b) = a^2V(X) \\ \bullet D(aX + b) = |a|D(X) \end{array} \right\}$$

**Linjärkombination**

- $E\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i E(X_i)$
- $V\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i^2 V(X_i) + 2 \underbrace{\sum_{i < j} a_i a_j C(X_i, X_j)}_{=0 \text{ om oberoende}}$

F6 - 3

**Kovariansen är bilinjär**

dvs linjär i båda argumenten (jfr polynommultiplikation)

$$C\left(\sum_j a_j X_j, \sum_k b_k Y_k\right) = \sum_j \sum_k a_j b_k C(X_j, Y_k)$$

$$\text{Ex. } C(X_1 + 2X_2, 3Y_1 - 4Y_2) = 1 \cdot 3C(X_1, Y_1) - 1 \cdot 4C(X_1, Y_2) + 2 \cdot 3C(X_2, Y_1) - 2 \cdot 4C(X_2, Y_2)$$

Ex.  $Y = 2X_1 - X_2$ . Uttryck  $V(Y)$  i  $V(X_1)$ ,  $V(X_2)$  och  $C(X_1, X_2)$ .

$$\begin{aligned} V(Y) &= C(Y, Y) = C(2X_1 - X_2, 2X_1 - X_2) = \\ &= 4C(X_1, X_1) - 2C(X_1, X_2) - 2C(X_2, X_1) + C(X_2, X_2) = \\ &= 4V(X_1) - 4C(X_1, X_2) + V(X_2) \end{aligned}$$

F6 - 4

**Specialfall av oberoende och likafördelade s.v.**Låt  $E(X_i) = \mu, V(X_i) = \sigma^2$ 

$$\text{Summa, } Y = \sum_{i=1}^n X_i$$

- $E(Y) = E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = \sum_{i=1}^n \mu = n\mu$
- $V(Y) = V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n V(X_i) = \sum_{i=1}^n \sigma^2 = n\sigma^2$

$$\text{Medelvärde, } \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

- $E(\bar{X}) = \sum \frac{1}{n} E(X_i) = \frac{1}{n} \sum \mu = \frac{1}{n} n\mu = \mu$
- $V(\bar{X}) = \sum \frac{1}{n^2} V(X_i) = \frac{1}{n^2} \sum \sigma^2 = \frac{1}{n^2} n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$

F6 - 5

**Betingat väntevärde**Det betingade väntevärdet för  $X$  givet att  $Y = y$  blir (Inget nytt)

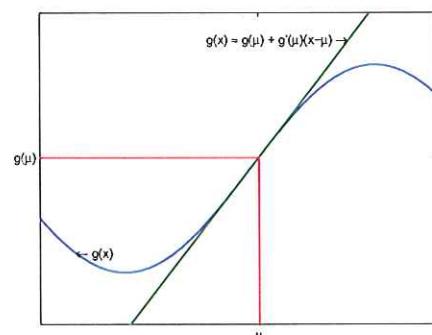
$$E(X | Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x | y) dx$$

Observera att

 $E(X | Y = y)$  är en funktion av  $y$  $E(X | Y)$  är samma funktion av  $Y$ **Satsen om total sannolikhet för väntevärde**

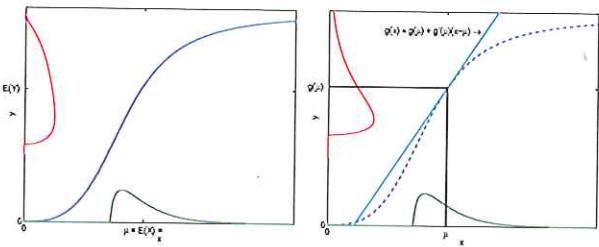
$$E(E(X | Y)) = E(X), \text{ dvs}$$

$$E(X) = \left\{ \begin{array}{l} \int E(X | Y = y) f_Y(y) dy \\ \sum E(X | Y = y) p_Y(k) \end{array} \right.$$

**Linjärisering av  $g(x)$  kring punkten  $\mu = E(X)$** 

F6 - 6

## Exakt och linjär transformation av fördelning



F6 - 8.5

### Ex.

Låt  $E(X) = \mu$  och  $V(X) = \sigma^2$ .

a) Bestäm approximativt väntevärde och varians för  $Y = g(X) = \pi X^2$ .

$$E(Y) \approx g(E(X)) = \pi\mu^2$$

$$V(Y) \approx [g'(E(X))]^2 V(X) = [g'(X) = 2\pi X] = (2\pi\mu)^2 \sigma^2$$

b) Bestäm väntevärdet för  $Y$  utan approximation.

Eftersom  $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$  fås  $E(X^2) = V(X) + E(X)^2$  och det sökta väntevärdet blir

$$E(Y) = E(\pi X^2) = \pi E(X^2) = \pi(V(X) + E(X)^2) = \pi\sigma^2 + \pi\mu^2$$

Vi ser att approximationen av väntevärdet alltid är för liten men stämmer bra om  $\sigma$  är liten i förhållande till  $\mu$ .

F6 - 10

### Ex.

Bestäm approximativa värden på variansen för  $X \cdot Y$  och  $X/Y$  om  $X$  och  $Y$  är oberoende av varandra. Uttryck svaren i  $\mu_X$ ,  $\mu_Y$ ,  $V(X)$  och  $V(Y)$ .

1.  $g(X, Y) = X \cdot Y$ .  $g'_X(X, Y) = Y$  och  $g'_Y(X, Y) = X$ .

$$\begin{aligned} V(X \cdot Y) &\approx [g'_X(\mu_X, \mu_Y)]^2 V(X) + [g'_Y(\mu_X, \mu_Y)]^2 V(Y) = \\ &= \mu_Y^2 V(X) + \mu_X^2 V(Y) \end{aligned}$$

2.  $g(X, Y) = \frac{X}{Y}$ .  $g'_X(X, Y) = \frac{1}{Y}$  och  $g'_Y(X, Y) = -\frac{X}{Y^2}$ .

$$V\left(\frac{X}{Y}\right) \approx \frac{1}{\mu_Y^2} V(X) + \frac{\mu_X^2}{\mu_Y^4} V(Y)$$

F6 - 12

## Gauß's approximationsformler

$Y = g(X)$ . Taylorutveckla funktionen  $g$  kring  $\mu = E(X)$

$$g(X) \approx g(\mu) + (X - \mu)g'(\mu) \Rightarrow$$

- $E(Y) \approx g(E(X))$

- $V(Y) \approx g'[E(X)]^2 V(X)$

För en funktion av  $n$  variabler fås på samma sätt  
 $Y = g(X_1, \dots, X_n)$

$$E(Y) \approx g(E(X_1), \dots, E(X_n))$$

$$V(Y) \approx \sum_{i=1}^n c_i^2 V(X_i) + 2 \sum_{i < j} c_i c_j C(X_i, X_j)$$

$$\text{där } c_i = \frac{\partial g}{\partial x_i}(E(X_1), \dots, E(X_n))$$

F6 - 9

## Gaussapproximation för två variabler

För en funktion av två variabler  $g(X, Y)$  blir Gauss approximationsformler (med  $E(X) = \mu_X, E(Y) = \mu_Y$ )

$$E(g(X, Y)) \approx g(\mu_X, \mu_Y)$$

$$\begin{aligned} V(g(X, Y)) &\approx [g'_X(\mu_X, \mu_Y)]^2 V(X) + [g'_Y(\mu_X, \mu_Y)]^2 V(Y) + \\ &+ 2[g'_X(\mu_X, \mu_Y)][g'_Y(\mu_X, \mu_Y)]C(X, Y) \end{aligned}$$

där sista termen är noll då  $X$  och  $Y$  är (tex) oberoende.  
 $g'_X$  och  $g'_Y$  är partiell derivata mot  $X$  resp.  $Y$ . Jämför detta med det generella uttrycket för en funktion av  $n$  variabler.

F6 - 11

---

 GAUSS'S APPROXIMATIONSFORMLER  
 MATEMATISK STATISTIK AK, FMS 012  
 JOAKIM LÜBECK, MARS 2007
 

---

## 1 Gauß's approximationsformler

Väntevärde och varians eller standardavvikelse är de viktigaste läges- och spridningsmåtten. Eftersom variansen är ett mått på osäkerheten är det intressant att kunna göra sig en uppfattning om dess storlek då man har en funktion av en eller flera variabler och man känner de ingående variablernas varians.

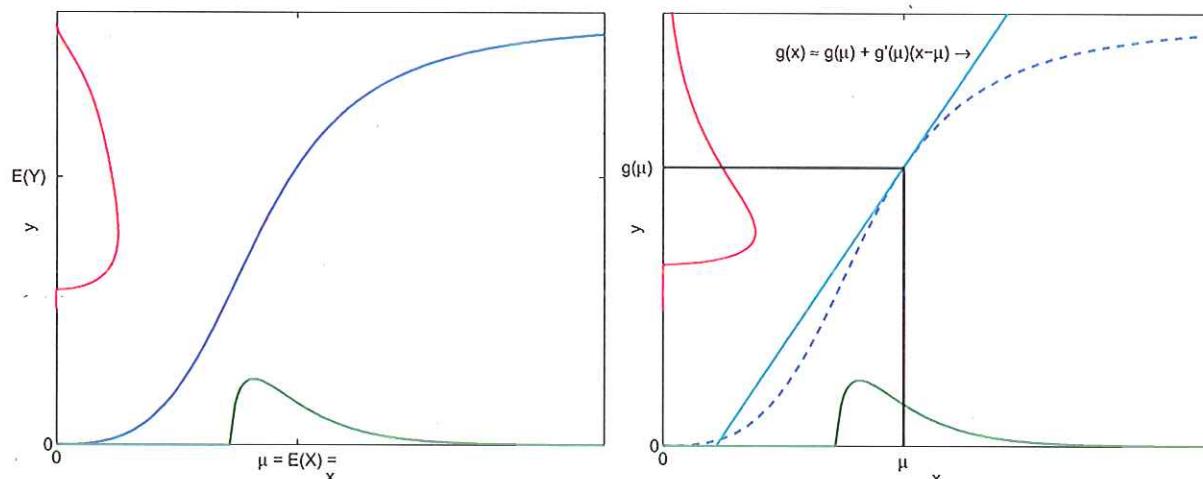
### 1.1 En variabel

För en kontinuerlig stokastisk variabel  $X$  gäller för en funktion,  $g(X)$ , av denna att

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x) dx$$

men denna integral är inte alltid lösbar;  $f_X(x)$  kanske inte ens är känd. Men känner man väntevärde och varians för  $X$  kan man få approximativa värden på  $E(g(X))$  och  $V(g(X))$  genom att approximera  $g(X)$  med en linjär funktion.

Första ordningens taylorutveckling av  $g(X)$  kring punkten  $\mu = E(X)$  kan skrivas



Figur 1.1: I vänstra figuren ses hur tätthetsfunktionen för  $X$  (—) transformeras till tätthetsfunktionen för  $Y$  (—) på  $y$ -axeln genom  $Y = g(X)$  (—). I högra figuren transformeras  $Y$  istället genom den rätta linje som tangerar  $g$  i punkten  $(\mu, g(\mu))$ .  $Y$ 's approximativa väntevärde  $E(Y) \approx g(\mu)$  är markerat.

$$g(X) \approx g(\mu) + (X - \mu)g'(\mu),$$

dvs den rätta linje som tangerar  $g(X)$  i punkten  $\mu$ . För väntevärde och varians för en linjär funktion har vi färdiga räkneregler ( $E(aX + b) = aE(X) + b$  och  $V(aX + b) = a^2 V(X)$ ) så vi får här ( $\mu, g(\mu)$  och  $g'(\mu)$  är tal)

$$E(g(X)) \approx E[g(\mu) + (X - \mu)g'(\mu)] = g(\mu) + g'(\mu)E(X) - g'(\mu)\mu = [E(X) = \mu] = g(\mu)$$

$$V(g(X)) \approx V[g(\mu) + (X - \mu)g'(\mu)] = V(g'(\mu)X) = [g'(\mu)]^2 V(X).$$

dvs

$$\begin{aligned} E(g(X)) &\approx g(E(X)) \\ V(g(X)) &\approx [g'(E(X))]^2 V(X). \end{aligned}$$

Om approximationen skall stämma bra bör naturligtvis funktionen  $g$  vara hyfsat linjär i en omgivning kring  $\mu$ , sär  $\mu$  plus minus ett par standardavvikelse för  $X$ . Dessutom bör  $g$  inte ha något extremvärde i denna omgivning, om  $g'(\mu)$  är noll blir ju approximationen av  $V(g(X))$  noll och är vi i närheten av denna punkt blir nog approximationen för liten. I figur 1.1 visas hur  $X$ 's fördelning transformeras av  $g$  och första ordningen taylorutveckling av den samma. I just det faller är funktionen  $g$  inte speciellt linjär i det område där  $X$  har sin fördelning.

**Exempel 1.1.** Låt  $E(X) = \mu$  och  $V(X) = \sigma^2$ .

(a) Bestäm approximativt väntevärde och varians för  $Y = g(X) = \pi X^2$ .

$$E(Y) \approx g(E(X)) = \pi\mu^2$$

$$V(Y) \approx [g'(E(X))]^2 V(X) = [g'(X) = 2\pi X] = (2\pi\mu)^2 \sigma^2$$

(b) Bestäm väntevärdet för  $Y$  utan approximation.

Eftersom  $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$  fås  $E(X^2) = V(X) + E(X)^2$  och det sökta väntevärderet blir

$$E(Y) = E(\pi X^2) = \pi E(X^2) = \pi(V(X) + E(X)^2) = \pi\sigma^2 + \pi\mu^2$$

Vi ser att approximationen av väntevärdet alltid är för liten men att felet blir litet om  $\sigma$  är liten i förhållande till  $\mu$ .

□

## 1.2 Flera variabler

För en funktion av två variabler,  $g(X, Y)$ , blir första ordningens taylorutveckling kring punkten  $(\mu_X, \mu_Y) = (E(X), E(Y))$  det plan som tangerar  $g$  i denna punkt

$$g(X, Y) \approx g(\mu_X, \mu_Y) + (X - \mu_X)g'_X(\mu_X, \mu_Y) + (Y - \mu_Y)g'_Y(\mu_X, \mu_Y)$$

där  $g'_X = \frac{\partial g}{\partial X}$  och motsvarande för  $Y$ . För en linjär funktion av två variabler har vi att  $E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c$  och  $V(aX + bY + c) = a^2V(X) + b^2V(Y) + 2abC(X, Y)$ , så i det här faller fås

$$\begin{aligned} E(g(X, Y)) &\approx E[g(\mu_X, \mu_Y) + (X - \mu_X)g'_X(\mu_X, \mu_Y) + (Y - \mu_Y)g'_Y(\mu_X, \mu_Y)] = \\ &= g(\mu_X, \mu_Y) + (E(X) - \mu_X)g'_X(\mu_X, \mu_Y) + (E(Y) - \mu_Y)g'_Y(\mu_X, \mu_Y) = g(\mu_X, \mu_Y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(g(X, Y)) &\approx V[g(\mu_X, \mu_Y) + (X - \mu_X)g'_X(\mu_X, \mu_Y) + (Y - \mu_Y)g'_Y(\mu_X, \mu_Y)] = \\ &= [g'_X(\mu_X, \mu_Y)]^2 V(X) + [g'_Y(\mu_X, \mu_Y)]^2 V(Y) + 2g'_X(\mu_X, \mu_Y)g'_Y(\mu_X, \mu_Y)C(X, Y). \end{aligned}$$

Detta kan generaliseras till en funktion av  $n$  st. variabler  $X_1, \dots, X_n$

$$E(g(X_1, \dots, X_n)) \approx g(E(X_1), \dots, E(X_n)).$$

$$V(g(X_1, \dots, X_n)) \approx \sum_{i=1}^n c_i^2 V(X_i) + 2 \sum_{i < j} c_i c_j C(X_i, X_j),$$

$$\text{där } c_i = \frac{\partial g}{\partial X_i}(E(X_1), \dots, E(X_n))$$

**Exempel 1.2.** Bestäm approximativa värden på variansen för  $X \cdot Y$  och  $X/Y$  om  $X$  och  $Y$  är oberoende av varandra. Uttryck svaren i  $\mu_X, \mu_Y, V(X)$  och  $V(Y)$ .

$$1. \quad g(X, Y) = X \cdot Y, g'_X(X, Y) = Y \text{ och } g'_Y(X, Y) = X.$$

$$\begin{aligned} V(X \cdot Y) &\approx [g'_X(\mu_X, \mu_Y)]^2 V(X) + [g'_Y(\mu_X, \mu_Y)]^2 V(Y) = \\ &= \mu_Y^2 V(X) + \mu_X^2 V(Y) \end{aligned}$$

$$2. \quad g(X, Y) = \frac{X}{Y}, g'_X(X, Y) = \frac{1}{Y} \text{ och } g'_Y(X, Y) = -\frac{X}{Y^2}.$$

$$V\left(\frac{X}{Y}\right) \approx \frac{1}{\mu_Y^2} V(X) + \frac{\mu_X^2}{\mu_Y^4} V(Y)$$

□

## Exempel 1.3.

□

### 1.3 Andra ordningens approximation\*

Vill man basera sin approximation på en andra ordningens taylorutveckling av  $g$ , som för en variabel blir

$$g(X) \approx g(\mu) + (X - \mu)g'(\mu) + \frac{1}{2}(X - \mu)^2 g''(\mu).$$

begränsar vi oss här till väntevärdet eftersom variansapproximationen blir ganska böig och kommer att innehålla termer av  $E(X^3)$  och  $E(X^4)$  vilket man sällan har information om vid tillämpning av Gauß-approximation.

$$E(g(X)) \approx g(\mu) + E(X - \mu)g'(\mu) + \frac{1}{2}E[(X - \mu)^2]g''(\mu) = g(\mu) + \frac{1}{2}V(X)g''(\mu).$$

För en funktion av  $n$  oberoende variabler kan man visa att

$$E(g(X_1, \dots, X_n)) \approx g(E(X_1), \dots, E(X_n)) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n d_i^2 V(X_i),$$

$$\text{där } d_i = \frac{\partial^2 g}{\partial X_i^2}(E(X_1), \dots, E(X_n))$$

Är de inte oberoende tillkommer kovarianstermer och korsderivator.