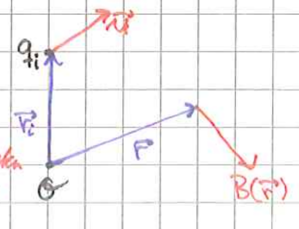
10/9-2012 **Biot-Sawarts lag** (S.2.2).

⑥

Magnetisk flödestäthet $\vec{B}$ från en samling punktladdningar q_i i $\vec{r}_i'$ med hastigheten $\vec{v}_i$.

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\sum_i q_i \frac{\vec{v}_i \times (\vec{r}-\vec{r}_i')}{|\vec{r}-\vec{r}_i'|^3}$$



Fundamentalt samband:

$$\boxed{c_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}}$$ ljushastigheten i vakuum

Övergång till kontinuerlig fördelning

N = laddningar/v.e. $\Rightarrow \sum_i q_i \vec{v}_i \to \iiint \underbrace{Nq\vec{v}}_{\vec{J}} dV'$

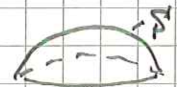
Vi het ger: $$\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')\times(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}dV'}$$

Om laddningstransporten sker längs en linje (tunn ledare): $\vec{J}dV' \to I d\vec{l}'$ konst. (stationära strömmar)

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint_L \frac{d\vec{l}'\times(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}}$$ BIOT-SAWARTS LAG

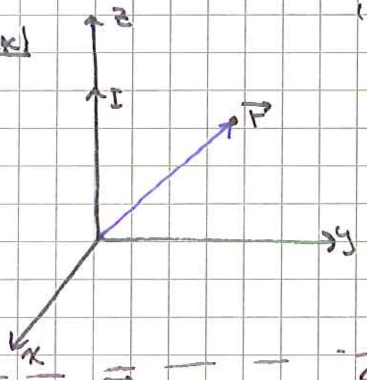
Motsvarande ytströmtäthet: $\vec{J}_S$ = laddningar/t.e/l.e

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iint_{S'} \frac{\vec{J}_S(\vec{r}')\times(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}dS'$$



(Griffiths: $\vec{J}_S = \vec{K}$)

Ex



Mätpunkt $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$

Källpunkt $\vec{r}' = z'\hat{z}$

Linjeelement $d\vec{l}' = \hat{z}dz'$

$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{z}dz' \times}{}$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{z}dz' \times (x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} - z'\hat{z})}{(x^2+y^2+(z-z')^2)^{3/2}} =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\hat{y} - y\hat{x}}{(r_c^2 + (z-z')^2)^{3/2}}dz' = \ldots = \frac{\mu_0}{2\pi r_c} I \underbrace{\frac{x\hat{y} - y\hat{x}}{r_c}}_{\hat{\varphi}}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi r_c}\hat{\varphi}$$

Vektorpotential

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')\times(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}dV' \qquad \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} = -\nabla\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

Man kan visa att $\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\times\iiint_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV' =$

$= \nabla\times\vec{A}(\vec{r})$ där $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV'$ Vektorpotential.

Vektorpotential: $\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \nabla\times\vec{A}(\vec{r})}$

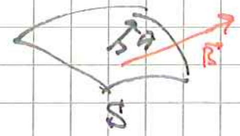
Konservering av magnetiskt flöde (S.3.2).

Vi ser genast $\nabla\cdot\vec{B}(\vec{r}) = \nabla\cdot(\nabla\times\vec{A}(\vec{r})) = 0$

$\vec{B}$:s flödeslinjer är slutna slingor: inga punktkällor, jfr: elstatik $\nabla\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_0$.

Magnetiskt flöde Φ genom en yta S med ytnormal $\hat{n}$:

$$\Phi = \iint_S \vec{B}\cdot\hat{n}\,dS.$$



Flödet genom en sluten yta är 0.

$$\Phi = \oiint_S \vec{B}\cdot\hat{n}\,dS = \iiint_V \nabla\cdot\vec{B}\,dV = 0$$

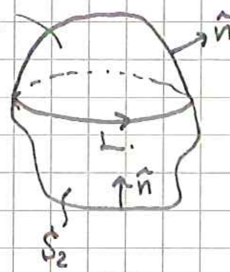
Flödeskonservering

Det magnetiska flödet Φ genom två olika ytor med gemensam randkurva L är lika.

Enhetsnormalen $\hat{n}$:s orientering följer "högerregeln" med L:s omloppsriktning.

$$\Phi_1 = \iint_{S_1}\vec{B}\cdot\hat{n}\,dS$$

$$\Phi_2 = \iint_{S_2}\vec{B}\cdot\hat{n}\,dS.$$



$$\boxed{\Phi_1 - \Phi_2} = \oiint_{S_1 - S_2}\vec{B}\cdot\hat{n}\,dS = \oiint_{\text{sluten yta}}\vec{B}\cdot\hat{n}\,dS = 0 \Rightarrow \boxed{\Phi_1 = \Phi_2}$$

Ampères lag (S.3.2).

$\vec{B}$:s vektorpotential $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV'$

Jämför med elstatik:

$$\nabla^2 V = -\rho/\varepsilon_0 \quad \text{och} \quad V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV'$$

För varje kartesisk komponent av $\vec{A}$ gäller därför att $\boxed{\nabla^2 A_x = -\mu_0 J_x}$

Alla komponenter: $\boxed{\nabla^2\vec{A}(\vec{r}) = -\mu_0\vec{J}(\vec{r})}$. Vi skriver om detta samband i $\vec{B}$-fältet.

$$\nabla\times\vec{B} = \nabla\times(\underbrace{\nabla\times\vec{A}}_{=\vec{B}}) = \nabla(\nabla\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A}$$

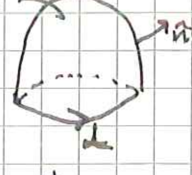
Man kan visa att $\nabla\cdot\vec{A} = 0$

Vi får $\boxed{\nabla\times\vec{B} = -\nabla^2\vec{A} = \mu_0\vec{J}}$

AMPÈRES LAG.

Integral formulering:

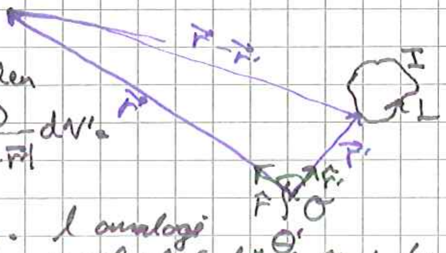
$$\iint_S(\nabla\times\vec{B})\cdot\hat{n}\,dS = \mu_0\iint_S\vec{J}\cdot\hat{n}\,dS$$



Stokes sats: $\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l}$ $\qquad$ I = strömmen genom S.

$$\Rightarrow \boxed{\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I}$$

MULTIPOLUTVECKLINGAR AV VEKTORPOTENTIALEN (5.4.3)



Vektorpotentialen

$$A(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,dV' .$$

$$\underset{\text{strömslinga}}{=} \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_L \frac{d\vec{l}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} .$$

I analogi med elstatikfallet (var je kartesisk komp)

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} \int_L P_l(\cos\theta')\,dl'}$$

De första termerna

$\boxed{l=0}$ $\int_L d\vec{l}' = \vec{0}$ (monopolterm saknas).

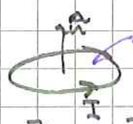
$\boxed{l=1}$ $\frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{1}{r^2} \int_L r' \underbrace{\cos\theta'}_{\hat{r}\cdot\hat{r}'} d\vec{l}' = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{1}{r^2} \int_L \hat{r}\cdot\vec{r}'\,d\vec{l} =$

$\overset{(1)}{=} \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{1}{r^2} \iint_S \hat{n}\times\underbrace{\nabla'(\hat{r}\cdot\vec{r}')}_{\hat{r}}\,dS' =$

(1) Stokes analoga sats.
$$\oint \phi\, d\vec{l} = \iint \hat{n}\times\nabla\phi\, dS$$
Istället fr. Stokes sats...

$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m}\times\hat{r}}{r^2}$ där $\boxed{\vec{m} = I\iint_S \hat{n}\,dS}$ Slingans magnetiska dipolmoment.

Plan slinga:



A = arean av slingan.

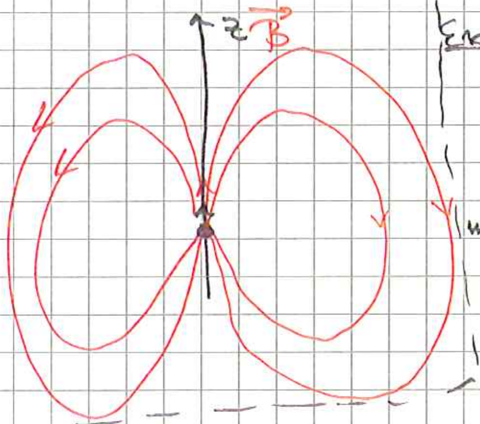
$\vec{m} = I\hat{n}A$

$m = |\vec{m}| = I\cdot A$

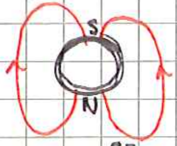
Specialfall $\hat{n}=\hat{z}$: $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} m \frac{\hat{z}\times\hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} m \frac{\hat{z}\times\vec{r}}{r^3} =$

$\ldots = \frac{\mu_0}{4\pi} m \frac{\hat{\phi}\sin\theta}{r^2}$

$$\vec{B}_{dip}(\vec{r}) = \nabla\times\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3}(2\hat{r}\cos\theta + \hat{\theta}\sin\theta)$$



Ex: Jorden.



$m = 0{,}824\cdot 10^{23}\ \mathrm{Am}^2$