Föreläsning 5

$$e^{tA} = I + tA + \frac{t^2A^2}{2!} + \frac{t^3A^3}{3!} + \dots$$

A är diagonaliserbar $\Rightarrow S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A = S\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}S^{-1}$

$\Rightarrow e^{tA} = S\begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{t\lambda_n} \end{pmatrix}S^{-1}$

Sats 6.1 (s 90-91)

① $e^{0} = I$ ($0 \leftarrow$ nollmatris)

② $AB = BA \Rightarrow e^A e^B = e^B e^A = e^{A+B}$

ty $e^A e^B = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!}\right) = \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{A^j}{j!}\left(\sum_k \frac{B^k}{k!}\right)\right)$

$= \sum_j \sum_k \left(\frac{A^j}{j!} \frac{B^k}{k!}\right)$

ty $AB=BA$: $\sum_j\left(\sum_k \frac{B^k}{k!}\right)\frac{A^j}{j!} = \sum_k \frac{B^k}{k!}\sum_j \frac{A^j}{j!} = e^B e^A$

A^2B^3
$= AABBB$
$= ABABB$
$= \dots$
$= ABBBA$
$= \dots$
$= BBBAA$
$= B^3A^2$

③ $e^{(t_1+t_2)A} = e^{t_1A}e^{t_2A}$, ty $(t_1A)(t_2A) = t_1t_2A^2$
$= (t_2A)(t_1A)$ och ②

④ e^{tA} är inverterbar med inversen $(e^{tA})^{-1} = e^{-tA}$, ty $(e^{tA})(e^{-tA})$
$\overset{③}{=} e^{tA-tA} = e^{0} = I$

⑤ $\frac{d}{dt}\left(e^{tA}\right) = e^{tA}A = Ae^{tA}$, ty $\frac{d}{dt}\left(e^{tA}\right) = \frac{d}{dt}\left(I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \dots\right)$
$= \left(0 + A + \frac{2t}{2!}A^2 + \frac{3t^2}{3!}A^3 + \dots\right) = \left(I + \frac{t}{1!}A + \frac{t^2}{2!}A^2 + \dots\right)A = e^{tA}A$

Sats 6.2 (s 93) Problemet $\begin{cases} \bar{x}' = A\bar{x} \\ \bar{x}(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \end{cases}$ $\leftarrow$ givna tal

har entydig lösning $\bar{x}(t) = e^{tA}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Bevis $\bar{x}' = \left(e^{tA}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right)' = \left(e^{tA}\right)'\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = Ae^{tA}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = A\bar{x}$

och $\bar{x}(0) = e^{0A}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = e^{0}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = I\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Ex 5.1 $A=\begin{pmatrix}1&3\\0&2\end{pmatrix}$ (a) Beräkna e^{tA} (b) Lös $\bar{x}'=A\bar{x}$, $\bar{x}(0)=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

Lösn Egenvärde: $\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix}\lambda-1&-3\\0&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-2)=0$

$\Rightarrow \lambda_1=1,\ \lambda_2=2$

Egenvektorer: (i) För $\lambda_1=1$ löser vi $\begin{pmatrix}1-1&-3\\0&1-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s_1\\s_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases}-3s_2=0\\0=0\end{cases}$ sätt $s_1=t$ så är $s_2=0$

$\Rightarrow \begin{pmatrix}s_1\\s_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t\\0\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, skriv $\bar{s}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

(ii) $\bar{s}_2=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$, sätt $S=(\bar{s}_1,\bar{s}_2)=\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}$

så blir $e^{tA}=S\begin{pmatrix}e^{1t}&0\\0&e^{2t}\end{pmatrix}S^{-1}=\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{t}&0\\0&e^{2t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-3\\0&1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}e^{t}&-3e^{t}+3e^{2t}\\0&e^{2t}\end{pmatrix}$

(b) Lösningen är

$\bar{x}(t)=e^{tA}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{t}&-3e^{t}+3e^{2t}\\0&e^{2t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}= -$

Ex 5.2 Beräkna e^{tA} för en icke diagonaliserbar matris

$A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$

Lösn Vi använder $e^{tA}=I+tA+\frac{t^2A^2}{2!}+\cdots$

där $A^2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=O$

$A^3=A^4=A^5=\cdots=O$

som ger $e^{tA}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+O=\begin{pmatrix}1&t\\0&1\end{pmatrix}$

$e^{tA} = S\begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{t\lambda_n}\end{pmatrix}S^{-1}$ för diagonaliserbara matriser A.

Ur formeln vet vi

Sats 5.3 (s 99)

A är diagonaliserbar $\Rightarrow$ e^{tA} bara har element av typ $b_1 e^{t\lambda_1} + b_2 e^{t\lambda_2} + \dots + b_n e^{t\lambda_n}$ där $b_1, b_2, \dots, b_n$ är konstanter.

Ex 5.3 Om $e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{at}+t & t \\ 0 & te^{at}\end{pmatrix} \overset{dvs}{=} \begin{pmatrix} e^{at}+te^{0t} & te^{0t} \\ 0 & te^{at}\end{pmatrix}$

så är A inte diagonaliserbar, ty e^{tA} innehåller element $e^{at} + t e^{0t}$

genom $(e^{tA})'\Big|_{t=0} = e^{tA}A\Big|_{t=0} = A$ kan man bestämma A.

kap 9 9.1-9.4 Ett system S är en avbildning som avbildar insignal w på utsignal $S(w)$.

Def 9.1 (s 138) S kallas linjärt om $S(c_1w_1 + c_2w_2) = c_1S(w_1) + c_2S(w_2)$ gäller för alla konstanter c_1, c_2 och alla insignaler w_1, w_2

Ett linjärt system S har följande egenskaper:

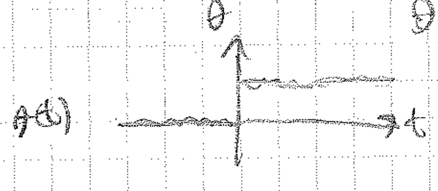
om man kan hitta en bas $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ för alla insignaler, dvs varje insignal $\varphi = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \dots$

så är $S(\varphi) = c_1S(\varphi_1) + c_2S(\varphi_2) + \dots$

Obs Om S är linjärt, så är $S(0) = 0$, ty $S(0) = S(0\cdot 0) = 0\cdot S(0) = 0$

Ex 9.4 $S(w(t)) \overset{def}{=} w(t) + 1$ är inte linjärt, ty $S(0) = 0+1 \neq 0$

9.5 ① Enhetssteg funktionen $\theta(t) = \begin{cases} 0, & \text{då } t<0 \\ 1, & \text{då } t>0\end{cases}$

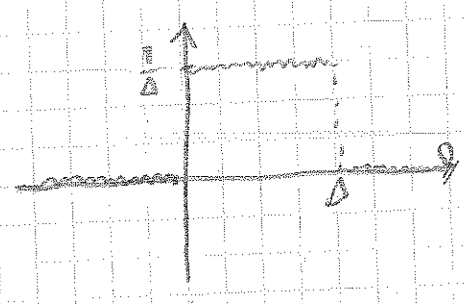


② $\theta_a(t) \overset{def}{=} \theta(t-a) \overset{skrivs}{=} T_a\,\theta(t)$

③ Rektangelpuls

$$p_\Delta(t) = \frac{1}{\Delta}\left(\theta(t) - \theta(t-\Delta)\right) \quad \text{där talet } \Delta > 0$$

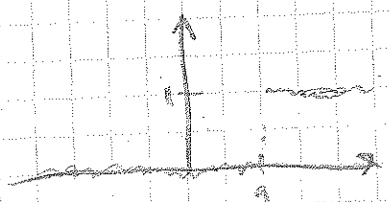
$p_\Delta(t)$



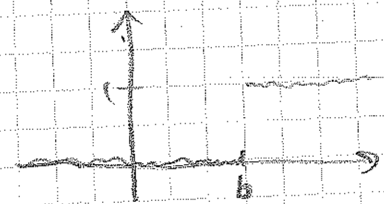
Ex 5.5

$b > a$

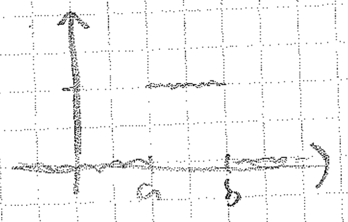
$\theta_a(t) = \theta(t-a)$



$\theta_b(t) = \theta(t-b)$



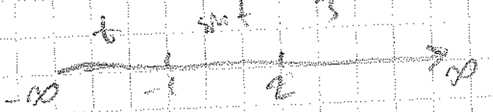
$\theta_a(t) - \theta_b(t)$



Ex 5.6

$$f(t) = \begin{cases} t, & t < -1 \\ \sin t, & -1 < t < 2 \\ 3, & t > 2 \end{cases}$$

dvs $f(t)$:



Kan skrivas som $f(t) = t\cdot(\theta_{-\infty}(t) - \theta_{-1}(t)) + \sin t\,(\theta_{-1}(t) - \theta_2(t))$

$+ 3(\theta_2(t) - \theta_\infty(t)) = t(\theta(t-(-\infty)) - \theta(t-(-1)))$

$$+ \sin t\,(\theta(t+1) - \theta(t-2)) + 3(\theta(t-2) - \underbrace{\theta(t-\infty)}_{0})$$

$$= t(1 - \theta(t+1)) + \sin t\,(\theta(t+1) - \theta(t-2)) + 3\,\theta(t-2)$$

Def 5.3 (s. 161)

Funktionen $f(t)$ kallas kausal om $f(t) = 0$ då $t < 0$

Ex 5.7 $\theta(t)$ är kausal