30/1-2012

(5)

Rep. $\begin{cases} \partial_t u - a\partial_x^2 u = 0 & \text{PDE} \\ u(0,t)=0,\ u(L,t)=0 & \text{Randvillkor} \\ u(x,0)=g(x) & \text{Begynnelsevillkor} \end{cases}$

Ansätt:

$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin\left(k\frac{\pi}{L}x\right)$ − löser direkt RV.

i (PDE):

$$\underbrace{\sum \left(u_k'(t) + a\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 u_k(t)\right)}_{=0} \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) = 0$$

ger $u_k(t) = C_k e^{-a\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t}$

$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-a\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{k\pi}{L}\right)x$ Löser PDE + RV.

Nu, BV:

$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) = g(x) \quad 0<x<L$

går att lösa: $C_k = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)dx$

$k = 1,2,3,\dots$

Neumannvillkor:

$u_x'(0,t)=0,\ u_x'(L,t)=0$

Ansätt

$\sum_{k=0}^{\infty} u_k(t)\cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$ istället. Lös RV direkt.

Metoden fungerar även för vågekvationen

Ex) Sträng av längd L, utan yttre krafter, fast inspänd vid $x=0$ & $x=L$

Vid $t=0$ - form $g(x)$.

och hastighet $h(x)$ [tons]

Modell:

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - c^2\partial_x^2 u = 0 & \text{(PDE)} \\ u(0,t)=0,\ u(L,t)=0 & \text{(RV)} \\ u(x,0)=g(x) & \text{(BV)} \\ u_t'(x,0)=h(x) & \text{(BV)} \end{cases}$$

Igen ansats

$u(x,t) = \sum u_k(t)\sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$

Löser (RV). I PDE:

$$\underbrace{\sum\left(u_k''(t) + c^2\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 u_k(t)\right)}_{=0}\sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) = 0$$

Kar. ekv: $r^2 + \left(\frac{ck\pi}{L}\right)^2 = 0$ ger $r = \pm i\frac{ck\pi}{L}$

Vidare ger detta

$u_k(t) = a_k\cos\left(\frac{ck\pi}{L}t\right) + b_k\sin\left(\frac{ck\pi}{L}t\right)$.

$\therefore u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\left(\frac{k\pi c}{L}t\right) + b_k\sin\left(\frac{k\pi c}{L}t\right)\right)\cdot\sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$

Detta löser PDE+RV.

BV:

$u(x,0) = \sum_1^{\infty}(a_k\cdot 1 + b_k\cdot 0)\sin\left(\frac{ck\pi}{L}x\right) = \sum_1^{\infty} a_k \sin\frac{k\pi}{L}x = g(x)$

i.e. $a_k = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)dx$

$u_t'(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cdot 0 + b_k\cdot\frac{ck\pi}{L}\cdot 1\right)\sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k\frac{ck\pi}{L}\sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right) = h(x)$.

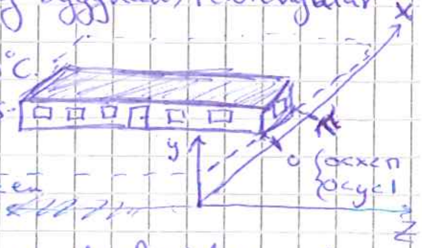
$b_k = \frac{2}{L}\int_0^L h(x)\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)dx$

Ex) Oisolerad lång byggnad, rektangulär i genomsnitt.

Lufttemperaturen 0°C.

(bortser från övergångsmotstånd)

Temperaturen i marken varierar som $\sin x$



Sök stationär temperaturfördelning i byggnaden. Fysikaliska konstanter försättes till 1.

Modellering:

$\partial_t u - a\Delta u = 0$ ($a = 1$)

Stationär − tidsderivatan: 0.

$\therefore \Delta u = 0 \iff \partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0$ (PDE)

$RV_x: u(0,y)=0,\ u(\pi,y)=0$

$RV_y: u(x,0)=\sin x,\ u(x,1)=0$

Ansätt $u(x,y) = \sum u_k(y)\sin(kx)$ löser RV_x.

i (PDE).

$$\underbrace{\sum\left(-k^2u_k(y) + u_k''(y)\right)}_{=0}\sin(kx) = 0$$

Kar ekv. $r^2 - k^2 = 0$ $r = \pm k$.

$u_k(y) = C_k e^{ky} + d_k e^{-ky} = a_k\cosh(ky) + b_k\sinh(ky)$.

$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cosh(ky) + b_k\sinh(ky))\sin(kx)$.

Löser PDE & RV_x.

RV_y: $u(x,0) = \sum(a_k\cdot 1 + b_k\cdot 0)\sin kx = \sin x$.

ger $a_1 = 1$

$a_k = 0 \quad k = 2,3,\dots$

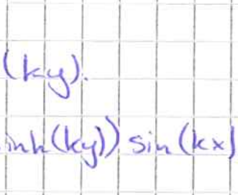
$u(x,1) = \sum\underbrace{(a_k\cosh(1\cdot k) + b_k\sinh(1\cdot k))}_{=0}\sin(kx) = 0$

$k = 2,3,\dots \begin{cases} a_k = 0 \\ a_k\cosh(k) + b_k\sinh(k) = 0 \end{cases} \iff a_k = b_k = 0$.

$\begin{cases} a_1 = 1 \\ \cosh(1) + b_1\sinh(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ b_1 = -\frac{\cosh 1}{\sinh 1} \end{cases}$

$\therefore$ Alltså $u(x,y) = \left(\cosh(y) - \frac{\cosh(1)}{\sinh(1)}\sinh(y)\right)\sin(x)$

löser problemet.



Inhomogena dirichletvillkor

Värmeledningsekv. igen.

$$\begin{cases} \partial_t u - a\partial_x^2 u = f(x,t) \\ u(0,t) = A,\ u(\pi,t) = B. \\ u(x,0) = g(x) \end{cases}$$

Om f bara beror på x.

Ex) $f(x) = 6x,\ a = 1$

$A = 1,\ B = 2$

Sök först lösning som inte beror på t.

$-\partial_x^2 u_{stat} = 6x \quad u_{stat}' = -3x^2 + C \quad u_{stat} = -x^3 + Cx + D$

$u_{stat}(0) = 1,\ u_{stat}(\pi) = 2$.

$u_{stat}(x) = -x^3 + \frac{1+\pi^2}{\pi}x + 1$. Sätt $v = u - u_{stat}$

$\partial_t v - \partial_x^2 v = 0 \quad v(0,t) = 0 \quad v(\pi,t) = 0$

$v(x,0) = g(x) - u_{stat}(x)$