Föreläsning 4

Kap 4.1-4.4 Stabilitet av ekvationen $\bar{x}' = A\bar{x} + \bar{f}(t)$, $t \geq t_0$

En ekvation kallas stabil om en liten ändring av ekvationen (dvs, små ändringar av A eller $\bar{f}(t)$ eller begynnelsevärde) kan bara leda till liten ändring av lösning $\bar{x}(t)$.

Obs En instabil ekvation är oanvändbar, ty det är svårt att bilda en exakt ekvation i många tillämpningar.

Ex 4.1 Är systemet

$$a)\quad \begin{cases} x' = -3x, & \text{där } t \geq 0 \\ x(0) = 2 \end{cases}$$

stabil?

Lösn Vi studerar en liten ändring av systemet

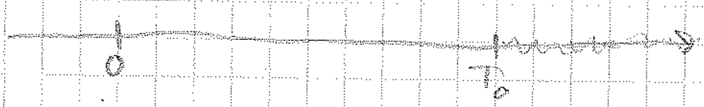
$$b)\quad \begin{cases} x' = (-3+\varepsilon_1)x \\ x(0) = 2+\varepsilon_2 \end{cases}$$

$\therefore$ a) har lösningen $x_a(t) = 2e^{-3t}$

och b) har lösningen $x_b(t) = (2+\varepsilon_2)e^{(-3+\varepsilon_1)t}$

Ty $x_a(t) \to 0$ och $x_b(t) \to 0$ då $t \to \infty$ så finns det ett T_0 så att

steg 1 $x_a(t) - x_b(t)$ är liten



steg 2 $x_a(t) - x_b(t)$ är liten där ε_1 och ε_2 är tillräckligt små.

$\therefore$ $x_a(t) - x_b(t)$ är liten för alla $t \geq 0$ om ε_1 och ε_2 är små

$\Rightarrow$ Systemet a) är stabil.

Inför $\sigma(A) = \max_{k=1,2,\dots,n} \mathrm{Re}(\lambda_k)$ $\qquad A = A_{n\times n}$

Sats 4.1 (s. 63-72)

Sats 4.1 (s 13-92)

	$\sigma(A) < 0$	$\sigma(A) = 0$	$\sigma(A) > 0$
$\bar{x}' = A\bar{x}$	stabil	Neutralt stabil eller instabil	instabil
$\bar{x}' = A\bar{x}$ med diagonaliserbar A	stabil	neutralt stabil	instabil
$\bar{x}' = A\bar{x} + \bar{f}(t)$	insignal stabil	icke insignalstabil	

Där ① stabil $\Leftrightarrow$ alla lösningar $\bar{x}(t) \to 0$ då $t \to \infty$

② neutralt stabil $\Leftrightarrow$ alla lösningar $x(t)$ är begränsade och någon lösning $\bar{x}(t) \not\to 0$ då $t \to \infty$

③ instabil $\Leftrightarrow$ någon lösning $\bar{x}(t)$ är obegränsad

④ insignalstabil $\Leftrightarrow$ Varje begränsade insignal $\bar{f}(t)$ ger begränsade lösningar (utsignal) $\bar{x}(t)$.

⑤ Talet $T_A \overset{\text{def}}{=} -\dfrac{1}{\sigma(A)}$, där $\sigma(A) < 0$

kallas tidskonstanten för systemet.

Idé av beviset för $\bar{x}' = A\bar{x}$ med diagonaliserbar A:

Ekvationen $\bar{x}' = A\bar{x}$ har en allmän lösning.

$$\bar{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\bar{s}_1 + \dots + c_n e^{\lambda_n t}\bar{s}_n$$

där $|c_j e^{\lambda_j t}\bar{s}_j| = |c_j| \cdot |e^{\lambda_j t}| \cdot |\bar{s}_j| = |c_j| e^{(\mathrm{Re}\,\lambda_j + i\,\mathrm{Im}\,\lambda_j)t} |\bar{s}_j|$

$= |c_j| e^{t\,\mathrm{Re}\,\lambda_j} \cdot |\bar{s}_j| \xrightarrow{\text{då } t\to\infty} 0$ om

$\therefore$ om $\sigma(A) < 0 \Leftrightarrow$ alla realdelar av λ_j är negativa

$\mathrm{Re}\,\lambda_j < 0$

$\Rightarrow$ alla termer i $\bar{x}(t)$ går mot 0 då $t \to \infty$

$\therefore \bar{x}(t) \to 0$ då $t \to \infty$

$\Rightarrow$ systemet är stabil

$\bar{x}' = A\bar{x}$

Ex 4.1 Avgör om $\bar{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \bar{x}$ är stabil

Lösn

A har egenvärde $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = i$, $\lambda_3 = -i$

Tre olika egenvärde $\Rightarrow$ A är diagonaliserbar och $\beta(A) = 0$

$\Rightarrow$ systemet är neutralt stabilt.

Stabilitet för $\bar{x}_k = A\bar{x}_{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots$

där A är diagonaliserbar.

$\boxed{\bar{x}_k = c_1 \lambda_1^k \bar{s}_1 + \cdots + c_n \lambda_n^k \bar{s}_n}$

Sats 4.2 För $\bar{x}_k = A\bar{x}_{k-1}$ med diagonaliserbar A gäller

① $\ell \overset{def}{=} \max_{j=1,2,\ldots} |\lambda_j| < 1 \Rightarrow$ stabil

② $\ell = 1 \Rightarrow$ neutralt stabil

③ $\ell > 1 \Rightarrow$ instabil

$|\lambda_j^k| = |\lambda_j|^k \to 0$ då $k \to \infty$, om $|\lambda_j| < 1$

S1.2 Matrispotens

Vi vet $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$ för alla tal x

Def För $A = A_{n \times n}$ definieras vi $e^A = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \cdots$

Ex 4.2 $e^{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}} = I + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^2 + \frac{1}{3!}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^3 + \cdots$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{pmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3!}\begin{pmatrix} 2^3 & 0 \\ 0 & 3^3 \end{pmatrix} + \cdots$

$= \begin{pmatrix} 1 + 2 + \frac{1}{2!}2^2 + \frac{1}{3!}2^3 \cdots & 0 \\ 0 & 1 + 3 + \frac{1}{2!}3^2 + \frac{1}{3!}3^3 + \cdots \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^3 \end{pmatrix}$

diagonalmatrisen

$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{pmatrix}$

för $k = 1, 2, \ldots$

Sats 4.3 ① $e^{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$

② $e^{S\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}S^{-1}} = S e^{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}} S^{-1} \overset{\text{enl. ①}}{=} S\begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} S^{-1}$

③ Om $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ dvs $A = S\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}S^{-1}$

så är $e^A \underset{=}{\overset{\text{enl ②}}{=}} S\begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}S^{-1}$

och $e^{tA} \overset{\text{tal}}{=} S\begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{t\lambda_n} \end{pmatrix}S^{-1}$

Bevis av ②

$$e^{S\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}S^{-1}} = I + S\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}S^{-1} + \frac{1}{2!}\left(S\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}S^{-1}\right)\left(S\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \end{pmatrix}\right.$$

$$= SIS^{-1} + S\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}S^{-1} + \frac{1}{2!}\left(S\begin{pmatrix} \lambda_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^2 \end{pmatrix}S^{-1}\right) + \ldots$$

$$= S\left(I + \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{pmatrix} \lambda_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^2 \end{pmatrix} + \ldots\right)S^{-1}$$

$$= S\begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}S^{-1}$$

Ex 4.3 Beräkna $e^{t\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{pmatrix}$

Lösn Vi vet att $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ har två linjärt oberoende egenvektorer $\bar{s}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ med $\lambda_1 = 1$, och $\bar{s}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ med $\lambda_2 = -3$

Skriv $S = \begin{pmatrix} \bar{s}_1 & \bar{s}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

så är $A = S\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}S^{-1}$

$\therefore e^{tA} = Se^{t\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}}S^{-1} = S\begin{pmatrix} e^{t\cdot 1} & 0 \\ 0 & e^{t(-3)} \end{pmatrix}S^{-1} =$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{-3t}+e^{t} & e^{-3t}-e^{t} \\ e^{-3t}-e^{t} & e^{-3t}+e^{t} \end{pmatrix}$$