5/2 - 2013 Ex) Antag att X och Y har kända (4) fördelningar. Vad är $P(X \le 1 \cup Y \le 2) =$
$= P(X \le 1) + P(Y \le 2) - P(X \le 1 \cap Y \le 2) =$
$= F_X(1) + F_Y(2) - ?$

Vi behöver veta hur X & Y beter sig tillsammans. (X, Y) kallas 2-dim stok.var.

Se $\boxed{F4-2}$

Ex) $p_X(j)$, $p_Y(k)$ samt $P(X = 1, Y \ge 1)$ om $p_{X,Y}(j,k)$

$j \backslash k$	0	1	2	$p_X(j)$
1	0,1	0,2	0,2	0,5
2	0,2	0,1	0,2	0,5

$p_X(j) = \sum_k p_{X,Y}(j,k) = 0{,}5 = 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}2.$

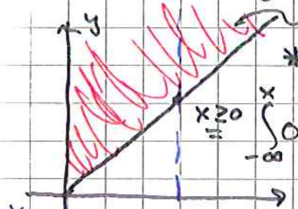
$p_Y(k)$	0,3	0,3	0,4	1

$P(X = 1, Y \ge 1) = \sum_{\substack{j=1\\k \ge 1}} p_{X,Y}(j,k) = p_{X,Y}(1,1) + p_{X,Y}(1,2) =$
$= 0{,}2 + 0{,}2 = 0{,}4.$

Ex) $f_{X,Y}(x,y) = e^{-y}$, $0 \le x \le y$.

Bestäm $f_X(x)$, $f_Y(x)$, $P(X + Y \le 2)$.

* Rita i (x,y)-planet där $f_{X,Y}(x,y) > 0$.

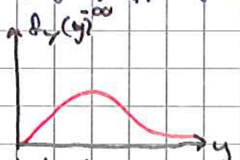


noteras $x \le y$

* $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} 0\,dy = 0.$ ($x \le 0$)

$\overset{x \ge 0}{=} \int_{-\infty}^{x} 0\,dy + \int_{x}^{\infty} e^{-y}\,dy = 0 + [-e^{-y}]_x^{\infty} = e^{-x}$ ($x \ge 0$)

* $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx =$
$= \int_0^y e^{-y}\,dx = y \cdot e^{-y}$ $y \ge 0.$



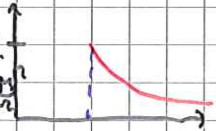
$P(X + Y \le 2) = \iint_{x+y \le 2} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy =$
$= \int_{x=0}^{1} \int_{y=x}^{y=2-x} e^{-y}\,dx\,dy = e^{-1} + e^{0} - e^{-1} + e^{-2} \approx 0{,}2\ldots$

Ex) forts. Bestäm de två betingade täthetsfunktionerna:

$f_{X|Y}(x,y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{e^{-y}}{ye^{-y}} = \frac{1}{y}$

dvs $X|Y = y \in R(0,y)$ $0 \le x \le y$.

$f_{Y|X}(y,x) = \frac{f_{Y,X}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{e^{-y}}{e^{-x}} = e^{-(y-x)}$



$N(\mu, \sigma)$: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

$Y|X = x \in N(\sqrt{x}, 1) \Rightarrow f_{Y|X=x}(y|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-\sqrt{|x|})^2}{2}}$

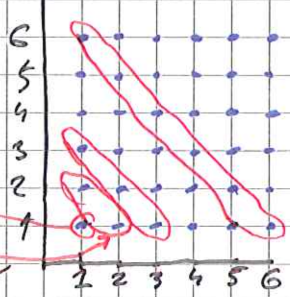
$f_{X,Y}(x,y) = f_{Y|X=x}(y|x) \cdot f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-\sqrt{|x|})^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$
$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2 + (y-\sqrt{|x|})^2}{2}}$, alla (x, y).

Ex) Låt X = res. av första tärningen.
Y = — " — andra — " —

$p_{X,Y}(j,k) = \begin{cases} \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} & \text{då } \begin{matrix} k = 1, \ldots, 6 \\ j = 1, \ldots, 6 \end{matrix} \\ 0 & \text{f.ö.} \end{cases}$

Sätt $Z = X + Y$

l	0	1	2	3	4	5	6	7
$p_Z(l)$	0	0	1	2	3	4	5	6



Σ: $\frac{1}{36}$ $\frac{2}{36}$ $\frac{3}{36}$

$l = 2$ $l = 3$

Sannolikhetsteori

- Händelser
  - En
  - Flera
  - Oberoende
  - Beting
- Stokastiska variabler
  - En
  - Transformation
  - Flera
  - Oberoende
  - Beting
  - Transformation
  - Summa, max, min
- Väntevärden
  - En
  - Transformation
  - Flera
  - Oberoende
  - Beting
  - Transformation
  - Linjär transformation
- Standardfördelningar
  - Normalfördelning (en, flera...)
  - Centrala gränsvärdessatsen
  - Binomial, Poisson
  - Normalapproximation
  - Lite Poissonprocess

F4 – 1

Tvådim. stokastisk variabel (X, Y)

Simultan fördelningsfunktion: $F_{X,Y}(x,y) = P(X \le x, Y \le y)$

Simultan sannolikhetsfunktion: $p_{X,Y}(j,k) = P(X = j, Y = k)$

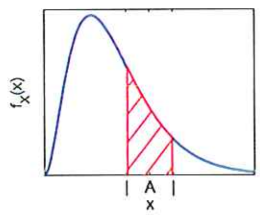
Simultan täthetsfunktion: $f_{X,Y}(x,y) = \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{X,Y}(x,y)$

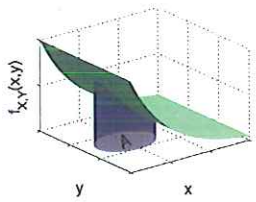
- $P[(X,Y) \in A] = \sum_{(j,k) \in A} p_{X,Y}(j,k)$
- $P[(X,Y) \in A] = \iint_A f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$
- $p_X(j) = \sum_k p_{X,Y}(j,k)$ Marginell slh.funkt. för X
- $f_Y(y) = \int f_{X,Y}(x,y)\,dx$ Marginell täthet för Y

F4 – 2

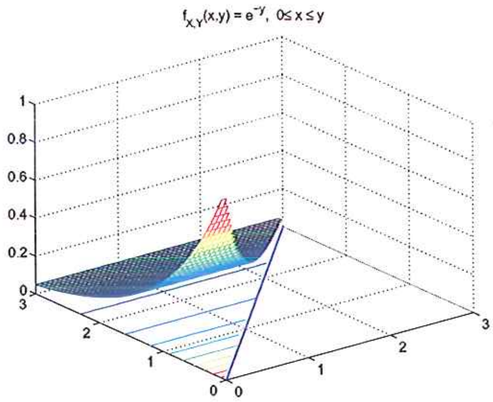
Sannolikheten att hamna i A är integral av tätheten över A

$P(X \in A) = \int_A f_X(x)\,dx \qquad P((X,Y) \in A) = \iint_A f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$





F4 – 3



F4 – 4

Oberoende stokastiska variabler

X och Y är *oberoende* stokastiska variabler

$\Longleftrightarrow$

$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$ för *alla* (x,y)

$\Longleftrightarrow$	$\Longleftrightarrow$
$p_{X,Y}(j,k) = p_X(j)p_Y(k)$ *alla* (j,k)	$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ *alla* (x,y)

Jämför med $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ för oberoende händelser

F4 – 5

Betingade fördelningar

Betingad sannolikhetsfunktion för X givet att $Y = k$

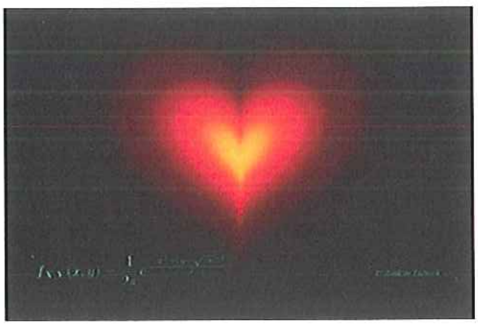
$$p_{X|Y}(j|k) = \frac{p_{X,Y}(j,k)}{p_Y(k)}$$

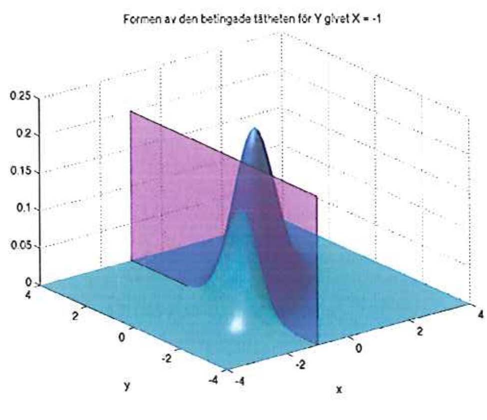
Betingad täthetsfunktion för Y givet att $X = x$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$$

F4 – 6

Ex. Om X och X_1 är oberoende och $N(0,1)$-fördelade och $Y = X_1 + \sqrt{|X|}$ blir $Y \mid X = x \in N(\sqrt{|x|}, 1)$ Bestäm den simultana täthetsfunktionen för (X, Y).





Simulering av tvådim. fördelning mha beting

Vet man fördelningen för X och för $Y \mid X = x$ kan man först simulera X och sedan Y via $Y \mid X = x$.

Ex. Om $f_{X,Y}(x, y) = e^{-y}$, $0 \le x \le y$ blir (enligt ex. på tavlan)

$f_X(x) = e^{-x}$, $x \ge 0$ dvs $X \in Exp(1)$

$f_Y(y) = ye^{-y}$, $y \ge 0$

$f_{X|Y=y}(x) = \dfrac{1}{y}$, $0 \le x \le y$ dvs $X \mid Y = y \in R(0, y)$

$f_{Y|X=x}(y) = e^{-(y+x)}$, $y \ge x$ förskjuten $Exp(1)$

(X, Y) kan simuleras med

```
x = exprnd(1,N,1);
y = x + exprnd(1,N,1);
```

eller först Y med inversmetoden och `x = unifrnd(0,y,1,N)`.