

Föreläsning 2

Tidsdiskreta system (fort.)

$$(1) \quad \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{k-1} \\ y_{k-1} \end{pmatrix} \quad \text{för } k=1, 2, \dots$$

$$\text{dvs } \vec{v}_k = A \vec{v}_{k-1}$$

har en allmän lösning $\vec{v}_k = c_1 \lambda_1^k \vec{s}_1 + c_2 \lambda_2^k \vec{s}_2$

då A har två linjärt oberoende egenvektorer \vec{s}_1 och \vec{s}_2 .

Den är en generalisering av följande lösning:

$$x_k = 3x_{k-1} \quad \text{har lösningar } x_k = c_1 \cdot 3^k$$

Vi vet också att $x_k = 3x_{k-1} + 2$ har lösningar $x_k = x_k^h + x_k^p$

Man gäller

Sats Den inhomogena rekursionsformeln

$$(2) \quad \vec{v}_k = A \vec{v}_{k-1} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad \leftarrow \text{en konstantvektor} \\ \text{där } k=1, 2, \dots$$

har en allmän lösning

$$\vec{v}_k = \vec{v}_k^h + \vec{v}_k^p \quad \leftarrow \text{en partikulärlösning till (2)} \\ \text{en allmän lösning till (1)}$$

Uppgift

Bestäm en \vec{v}_k^p .

Lösningsmetod:

Vi letar efter en konstantvektor $\vec{v}_k^p = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix}$ som är en lösning till (2)

$$\text{Då är } \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix} - A \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (I - A) \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix} = (I - A)^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad \text{om } (I - A)^{-1} \text{ existerar}$$

Sökt

(2) har en partikulär lösning $\vec{v}_p = (I-A)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ om $\det(I-A) \neq 0$
där \vec{v}_p är en egenvektor till A .

Bx 2.1

Lös $\begin{cases} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{cases} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ där $k=1, 2, \dots$

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösning steg 1: Eigenvärde: $\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2 - 1 = 0$

$$\Rightarrow \lambda = -2 \pm 1 \quad \text{dvs } \lambda_1 = -1 \quad \text{och } \lambda_2 = -3$$

Egenvektor: För $\lambda_1 = -1$ löser vi $\begin{pmatrix} -1-1 & -1 \\ -1 & -1-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Sätt $\vec{s}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

För $\lambda_2 = -3$ löser vi $\begin{pmatrix} -3-1 & -1 \\ -1 & -3-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Sätt $\vec{s}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

\therefore Den allmänna lösningen till homogena systemet är

$$\vec{v}_h = c_1 (-1)^k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 (-3)^k \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

steg 2 En partikulärlösning

$$\vec{v}_p = (I-A)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

\therefore Den allmänna lösningen till inhomogena ekvationerna är

$$\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = c_1 (-1)^k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 (-3)^k \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

steg 3 $c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} c_1 = 1 \\ c_2 = 0 \end{matrix}$

Den sökta lösningen är $\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = (-1)^k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Kap 3

Linjära differentialekvationer för matriser

En linjär differentialekvation

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}$$

Ans $\frac{d}{dt} \vec{x}(t) = A \vec{x}(t) + \vec{f}(t)$

Sågs vara homogen om $\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{\text{serius}}{=} \vec{0}$

Ex 2.2

Lös $\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Lös

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \lambda_1 x_1 & \text{--- (1)} \\ \frac{dx_2}{dt} = \lambda_2 x_2 & \text{--- (2)} \end{cases}$$

V. (1) $\frac{dx_1}{dt} = \lambda_1 x_1 = 0 \quad \int -\lambda_1 dt = e^{-\lambda_1 t}$

En integrerande faktor e

$$\left(e^{-\lambda_1 t} x_1(t) \right)' = 0 \Rightarrow e^{-\lambda_1 t} x_1(t) = C_1 \Rightarrow x_1(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}$$

Analogt har vi $x_2(t) = C_2 e^{\lambda_2 t}$

$$\therefore \text{Den sökta lösningen är } \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^{\lambda_1 t} \\ C_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$$

Fråga Hur löser vi $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$ för en vanligt diagonaliserbar matris A .

Lösningssätt A är diagonaliserbar $\Leftrightarrow A$ har två linjärt oberoende egenvektorer \vec{s}_1 och \vec{s}_2 med egenvärden λ_1 och λ_2 .

Såväl $S = (\vec{s}_1 \vec{s}_2)$

Då är $S^{-1} A S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

$$A = S \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} S^{-1}$$

Så har observationer $\frac{dx}{dt} = \underbrace{S \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} S^{-1}}_A \bar{x}$

$$S^{-1} \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} S^{-1} \bar{x}$$

$$\frac{d}{dt} (S^{-1} \bar{x}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} (S^{-1} \bar{x})$$

$$\begin{cases} x_1(0) = 5 \\ x_2(0) = 6 \end{cases}$$

$$\bar{x}_0 = S^{-1} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Så $\hat{x} = S^{-1} \bar{x}$ så är $\frac{d}{dt} \hat{x} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \hat{x}$

så har lösningar

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \text{ ty } \text{Ex 2.2}$$

$$\therefore S \hat{x} = \bar{x}$$

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \begin{pmatrix} s_1 & s_2 \end{pmatrix} \hat{x} = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \\ &= c_1 e^{\lambda_1 t} \overline{s_1} + c_2 e^{\lambda_2 t} \overline{s_2} \end{aligned}$$

Sats $\frac{dx}{dt} = Ax$ har en allmän lösning $\bar{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \overline{s_1} + c_2 e^{\lambda_2 t} \overline{s_2}$

Ex 2.3 löst $\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \bar{x}$

Lösning Ur Ex 2.1 vet vi att A har

$$s_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ med } \lambda_2 = 3$$

$$\text{och } s_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ med } \lambda_1 = -1$$

Så sats ger att $\bar{x}(t) = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$