18/1-2012 **Övergång tillståndsbeskrivning → G(s)**

(3) $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du. \end{cases}$

$\begin{cases} sX = AX + BU \\ Y = CX + DU \end{cases}$ $\quad sX - AX = BU \Leftrightarrow (sI - A)X = BU$

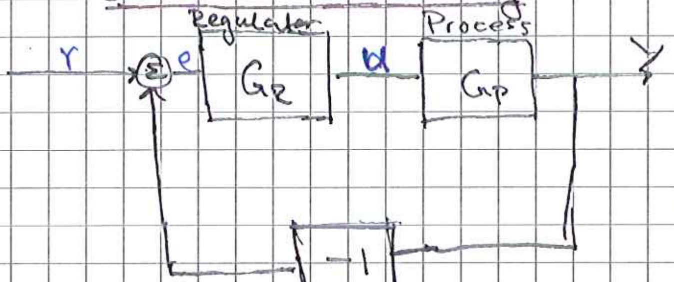
$\Rightarrow X = (sI - A)^{-1}BU$

$\Rightarrow Y = (\underbrace{C(sI-A)^{-1}B + D}_{G(s)})U$

Övergång G(s) → Tillståndsbeskrivning

Ej entydigt! Se formelsamlingen (s. 4).

Blockschemabeskrivning.

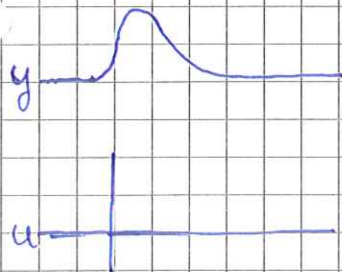


$\begin{cases} Y = G_p \cdot U \\ U = G_R \cdot E \\ E = R - Y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y = G_p G_R E \\ E = R - Y \end{cases}$

$\Rightarrow Y = G_p G_R (R - Y)$

$\Rightarrow Y = \frac{G_p G_R}{1 + G_p G_R}$

Impulssvar

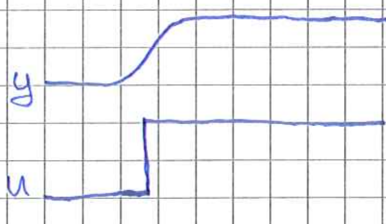


$u(t) = \delta(t)$

$U(s) = \int_0 e^{-st}\delta(t)\,dt = e^0 \cdot 1 = \underline{1}$

$Y(s) = G(s) \cdot U(s) = G(s).$

Stegsvar



$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

$U(s) = \int_0^\infty e^{-st}\,dt = \left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^\infty = \frac{1}{s}$

$Y(s) = G(s) \cdot U(s) = G(s) \cdot \frac{1}{s}$

Samband mellan överföringsfunktion - stegsvar

$Y(s) = G(s) \cdot \frac{1}{s}$

$\boxed{\text{Begynnelsevärdesteoremet: } \lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)}$

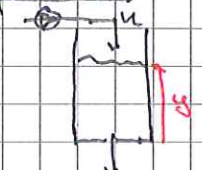
$\boxed{\text{Slutvärdesteoremet: } \lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)}$

Ex) Stegsvar.

$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} \cancel{s} G(s) \cdot \frac{1}{\cancel{s}} = G(0)$

Första ordningens process

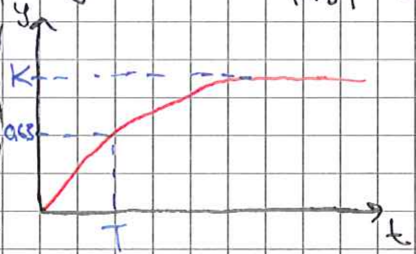
$G = \frac{K}{1+sT}$; Pol i $-\frac{1}{T}$.



Stegsvar: $Y(s) = \frac{K}{1+sT} \cdot \frac{1}{s} \Rightarrow y(t) = K(1 - e^{-t/T})$

$y(T) = K(1 - e^{-1}) \approx 0.63K$

T = tidskonstant.



Ju längre ut i vänster halvplan polerna ligger, desto snabbare process.

Slutvärdesteoremet:

$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{K}{1+sT} \cdot \frac{1}{s} = \underline{\underline{K}}.$

$G(0) = \frac{K}{1+0 \cdot T} = \underline{\underline{K}}.$

Begynnelsevärdesteoremet:

$\lim_{t\to 0} y'(t) = \lim_{s\to\infty} s^2 Y(s) = \lim_{s\to\infty} s^2 \frac{K}{1+sT} \cdot \frac{1}{s} = \frac{K}{T}$

(En integrator släpper inte ut någonting.)

Andra ordningens system

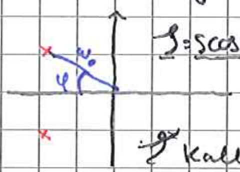
$G(s) = \frac{K}{(1+sT_1)(1+sT_2)}$ Poler: $\begin{cases} -\frac{1}{T_1} \\ -\frac{1}{T_2} \end{cases}$

Begynnelsevärdesteoremet:

$\lim_{t\to 0} y'(t) = \lim_{s\to\infty} s^2 Y(s) = \lim_{s\to\infty} s^2 \frac{K}{(1+sT_1)(1+sT_2)} \cdot \frac{1}{s} = 0$

Andra ordningens system, komplexa poler

{komplex konjugerade poler}



$\zeta = \cos\varphi$

$$G(s) = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$$

ζ kallas Relativ dämpning.