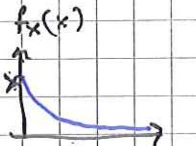
1/2-2013

(3)

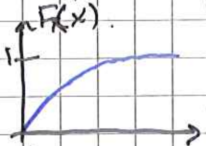
SEM: Ex) Invers till fördelningsfunktion (F3-5)

$X \in e^{\lambda}$

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$



$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$



$$F_X^{-1}(x) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1-x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

(F3-8)

Ex) (1) $X \in R(1,2)$

dvs $f_X(x) = \begin{cases} 1 & 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{fö} \end{cases}$

$Y = \pi X^2$; Vilka värden kan Y anta?

– Mellan $\pi \cdot 1^2 = \pi$ och $\pi \cdot 2^2 = 4\pi$.

Börja med $F_Y(y)$

$X > 0$

$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\pi X^2 \leq y) =$
$= P(X \leq \sqrt{\frac{y}{\pi}}) = F_X(\sqrt{\frac{y}{\pi}})$

$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{d}{dy} F_X(\sqrt{\frac{y}{\pi}}) =$

$= f_X(\sqrt{\frac{y}{\pi}}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi y}} =$

$= \left(f_X(x) = \begin{cases} 1 & 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{f.ö.} \end{cases} \right) =$

$= \begin{cases} 1 \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi y}} & 1 \leq \sqrt{\frac{y}{\pi}} \leq 2 \\ 0 \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi y}} & \text{f.ö.} \end{cases} =$

$= \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{\pi} y}, & \pi \leq y \leq 4\pi \\ 0, & \text{f.ö.} \end{cases}$

(2) X:

i	-1	0	1	2
$p_X(i)$	$\frac{2}{10}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$

$Y = X^4$

Y antar $k = i^4$ om $X = i$

k	0	1	16
$p_Y(k)$	$\frac{5}{10}$	$\frac{2}{10} + \frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$

$p_Y(k) = \sum_{i: g(i) = k} p_X(i)$

(3.) X kont. stokastisk variabel med given $F_X(x)$.

Sätt $Y = g(X) = F_X(X)$

F_X är en sdh. så $0 \leq Y \leq 1$.

$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(F_X(X) \leq y) = P(F_X^{-1}(F_X(X)) \leq F_X^{-1}(y)) =$
$= P(X \leq F_X^{-1}(y)) = F_X(F_X^{-1}(y)) = y, \quad 0 \leq y \leq 1.$

$f_Y(y) = \frac{d}{dy} y = 1, \quad 0 \leq y \leq 1.$, dvs. $Y \in R(0,1)$.

(4) => se (F3-9).

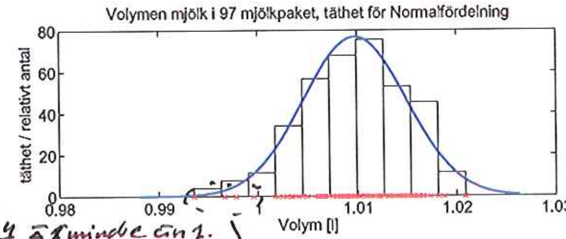
1/2-2013

(3)

SEM.

Grafisk presentation av ett datamaterial

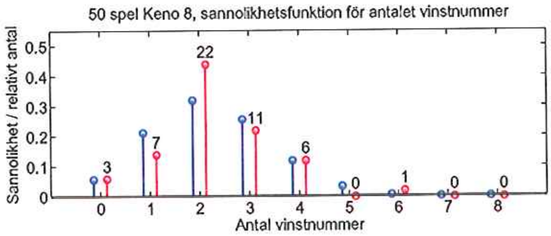
I ett *histogram* delar man in datamaterial i lika stora intervall och avsätter en stapel vars höjd är proportionell mot antalet mätvärden stapeln står på. Om man normerar totala stapelarean till 1 kan man jämföra med en *täthetsfunktion.*



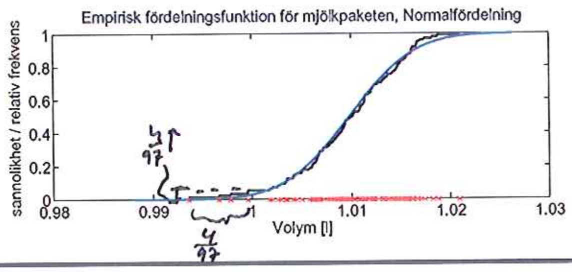
$\frac{4}{97}$ är mindre än 1.

$\int_{-\infty} f_X(x) \approx \frac{4}{97}$. $\frac{1}{97}$.

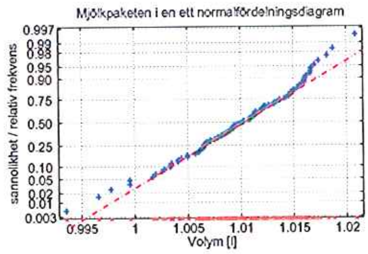
Vid diskreta data kan man i stället göra staplar på varje utfall och låta höjden vara andelen mätvärden med det givna utfallet. Stapeldiagrammet kan jämföras med en *sannolikhetsfunktion.*



En *empirisk fördelningsfunktion* konstrueras genom att sortera de n mätvärdena och plotta mätvärde i mot i/n. Vid ett givet x-värde kan man då avläsa andelen mätvärden som är mindre än detta x. Denna kan jämföras med en *fördelningsfunktion.*



Vanligt är att man skalar om axlarna i den empiriska fördelningsfunktionen så att en given fördelnings fördelningsfunktion blir en rät linje. T.ex en *normalfördelningsplot*. Denna är användbar för att se om datamaterialet passar den givna fördelningen.



Invers till fördelningsfunktion

Fördelningsfunktionen till en kontinuerlig s.v. X, $F_X(x)$ är strängt växande, så den har en invers funktion, $F_X^{-1}(x)$. Den är användbar till

- Bestäm k så att $P(X \leq k) = \frac{1}{3}$. Lsg: $F_X(k) = \frac{1}{3} \iff F_X^{-1}(F_X(k)) = F_X^{-1}(\frac{1}{3}) \iff k = F_X^{-1}(\frac{1}{3})$.
- Beräkna kvantiler x_α som definieras som $F_X(x_\alpha) = 1 - \alpha$. Kvantilen blir $x_\alpha = F_X^{-1}(1-\alpha)$.
- Generera slumptal som har en given fördelning. (Se inversmetoden)

Statistics toolbox i matlab finns $F_X^{-1}(x)$ implementerad för de vanligaste fördelningarna.

Ex. Beräkna F_X^{-1} om $X \in Exp(\lambda)$. Anf.

Generering av slumptal från $R(0,1)$-fördelning

Ett enkel sätt är att använda en *kongruensalgoritm* av typen

$$x_{n+1} = (ax_n + b) \bmod c$$

som ger heltal mellan 0 och $c-1$. Detta x_i-värde delas sedan med c för att hamna i intervallet $[0,1)$. Dessa sk *pseudoslumptal* kan användas för simulering men är ej lämpliga för kryptografiska ändamål. De är

- Deterministiska, men "ser slumpmässiga ut" om heltalen a, b, c väljs med omsorg. Vanligt är a=7^5, b=0, c=2^{31}-1
- Sekvensen är periodisk med perioden c.
- Man får *samma* sekvens för ett givet startvärde x_0.

Se t.ex *Numerical Recipies in C*, kap. 7 (www.nr.com) eller Knuth: *The Art of Computer Programming*, vol 2. för diskussion och andra algoritmer.

Transformation av stokastiska variabler

Givet en s.v. X. Vilken fördelning får $Y = g(X)$?
Metod om Y är kontinuerlig:

1. Sätt upp $F_Y(y) = P(Y \leq y)$.
2. Stoppa in $Y = g(X)$ och uttryck $F_Y(y)$ som fkn av $F_X(y)$.
3. Derivera för att få $f_Y(y)$ som fkn av $f_X(y)$

Om Y är diskret kan man räkna ut sannolikhetsfunktionen

$$p_Y(k) = \sum_{j:g(j)=k} p_X(j)$$

dvs $P(Y = k)$ fås genom att "lägga ihop $p_X(j)$ för alla j sådana att $g(j) = k$".

Ex.

1. Vilken täthetsfunktion har $Y = \pi X^2$ om $X \in R(1,2)$?
2. Bestäm $p_Y(k)$ om $Y = X^4$ och

i	-1	0	1	2
$p_X(i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$

3. Vilken fördelning får man om man stoppar in en kont. s.v. X i sin egen fördelnigsfunktion $F_X(x)$?
4. Vilken fördelning får man om man stoppar in $X \in R(0,1)$ i inversen till fördelningsfunktion för en s.v. Y? dvs $Z = F_Y^{-1}(X)$.

Inversmetoden

Låt $X \in R(0,1)$, dvs $F_X(x) = x$, $0 \leq x \leq 1$.

Låt Y vara en godtycklig kontinuerlig s.v. med fördelningsfunktion $F_Y(y)$ som har inversen $F_Y^{-1}(y)$.

Bestäm fördelningsfunktionen för $Z = F_Y^{-1}(X)$.

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(Z \leq z) = P(F_Y^{-1}(X) \leq z) = P(F_Y(F_Y^{-1}(X)) \leq F_Y(z)) \\ &= P(X \leq F_Y(Z)) = F_X(F_Y(z)) = F_Y(z) \end{aligned}$$

Dvs om vi vill ha slumptal från en fördelning med fördelningsfunktion $F_Y(y)$ kan vi

- Räkna ut $F_Y^{-1}(y)$
- Dra slumptal från en $R(0,1)$-fördelning.
- Stoppa in slumptalen i $F_Y^{-1}(y)$ så fås önskad fördelning.