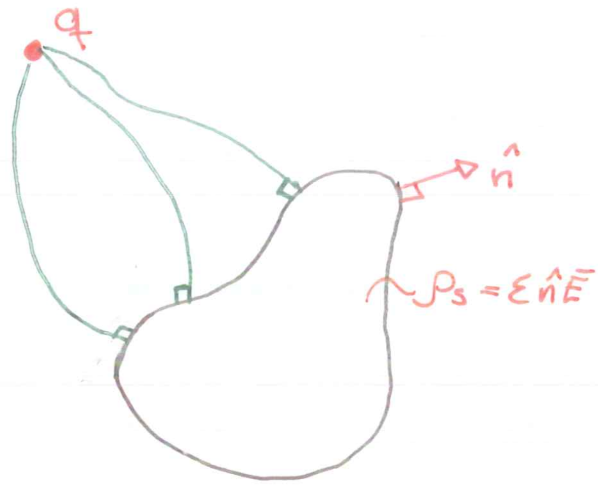
Föreläsning 3

7/9-2015

Ledare i statik



1. $\bar{E} = 0$
2. $\rho(\bar{r}) = 0$
3. All nettoladdning finns på ytan
4. $\bar{E} = E\hat{n}$
5. $\rho_s = \varepsilon_0 E$
6. Ytan är en ekvipotentialyta.

Kondensatorer

$Q = CV$ (två ledare med $+Q$ och $-Q$)

$C = \dfrac{\varepsilon_0 A}{d}$ (plattkondensator)

Ultrakondensatorer kan ha upp till ~4000 Farad.

Kap 3 –

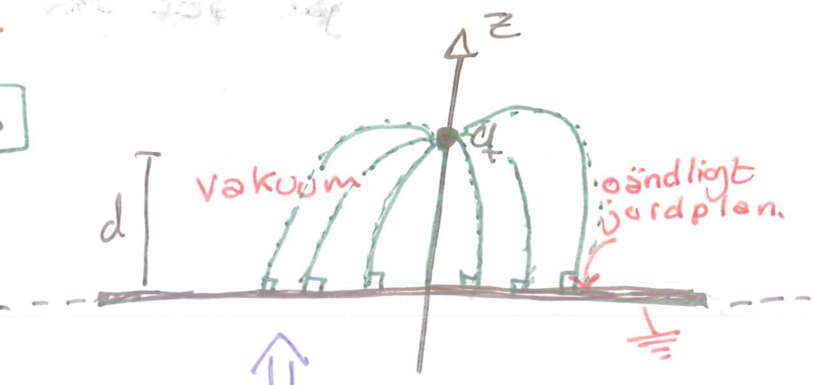
Entydighet

Hur många lösningar har ett problem?

$$\begin{cases} \nabla^2 V = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \\ V \to 0 \text{ då } r \to \infty \end{cases}$$

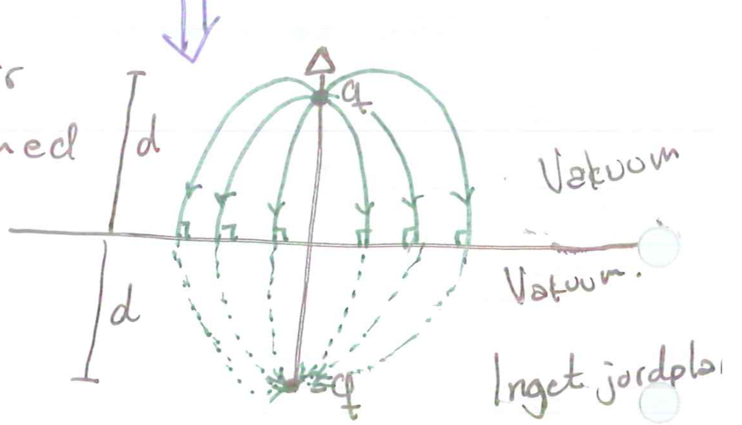
Det kan visas att V är entydigt best. Detta görs genom att anta att det finns två lösningar V_1 och V_2 och beräkna $V_1 - V_2 = V_3$. Det visar sig att $V_3 = 0$ $\square$

Speglingsmetoden



$\boxed{\text{Bestäm } V(\bar{r}),\ \bar{E}(\bar{r}) \text{ för } z \geq 0}$

1. Rita fältlinjer
2. Spegla i planet genom att ansätta en $-q$ på "andra siden".
3. Notera att fältbilden för din nya modell är ekvivalent med den gamla för $z \geq 0$!



Är $V=0$ för $z=0$?

$\bar{r} = r_c\hat{r}_c,\ \bar{r}_1 = d\hat{z},\ \bar{r}_2 = -d\hat{z}$

$$V(x,y,0) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{|\bar{r}-\bar{r}_1|} - \frac{1}{|\bar{r}-\bar{r}_2|}\right) = 0$$

eftersom $|\bar{r}-\bar{r}_1| = |\bar{r}-\bar{r}_2|$.

Så för $z \geq 0$ har vi samma problem som med jordplanet.

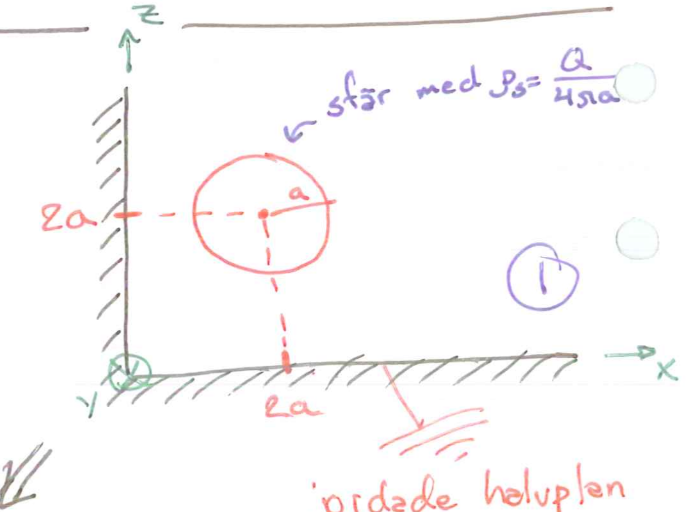
Exempel

$\boxed{\text{Bestäm kraften på sfären.}}$

Spegla TVÅ GÅNGER!

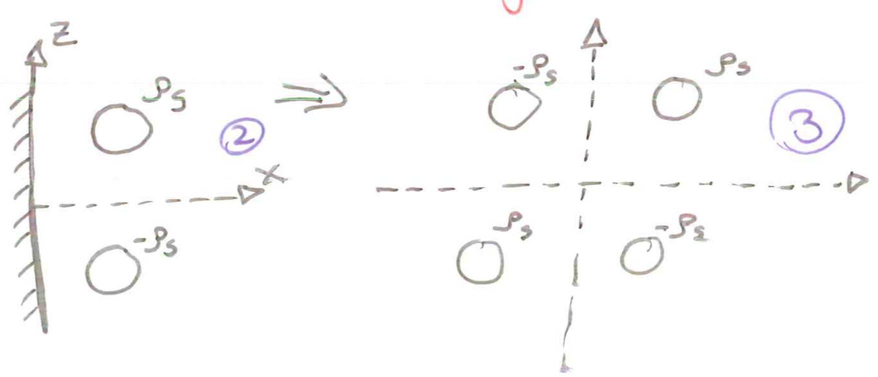
Symmetri $\Rightarrow V=0$ för $z=0$ och $x=0$

$3 \Rightarrow V(r)$ för $x \geq 0,\ z \geq 0,\ -\infty < y < \infty$

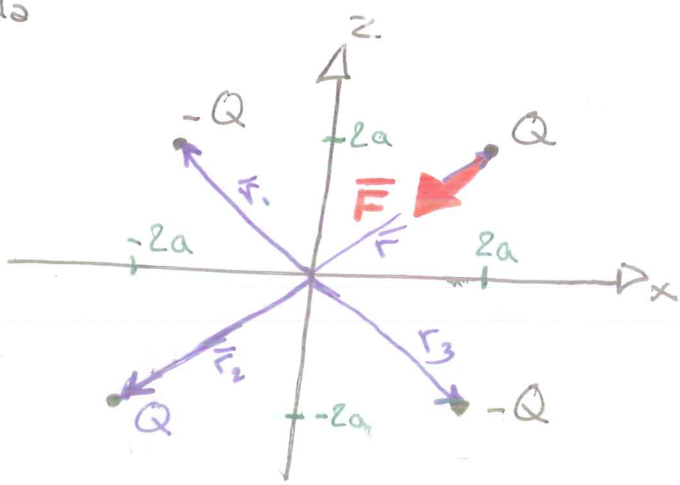


Kraften då?

Ersätt sfärerna med punktladdningar i deras centrum. Utifrån kan vi inte se någon skillnad! (nästa sida)



Hur vet vi att det går att använda punktladdningar?
Newtons 3e lag säger att till varje kraft (i statik) så finns en motriktad. Tänk lite bara.
(Räkna kraften på de tre nya Q:na)



"Försök eliminera tänkandet, skriv bara"

$$\boxed{\bar{F} = Q\bar{E} = \bar{F}_1 + F_2 + \bar{F}_3}$$

$\bar{r} = (2a, 0, 2a)$

$r_1 = (-2a, 0, 2a)$

$r_2 = (-2a, 0, -2a)$

$\bar{r}_3 = (2a, 0, -2a)$

$|\bar{r} - \bar{r}_1| = 4a$

$|\bar{r} - \bar{r}_2| = 4\sqrt{2}a$

$|\bar{r} - \bar{r}_3| = 4a$

$$\bar{F}_n = \frac{Q(Q_n)(\bar{r} - \bar{r}_1)}{4\pi\varepsilon_0 |\bar{r} - \bar{r}_n|}, \quad n = 1, 2, 3.$$

Räkna, räkna... => $\boxed{\text{SVAR}}$

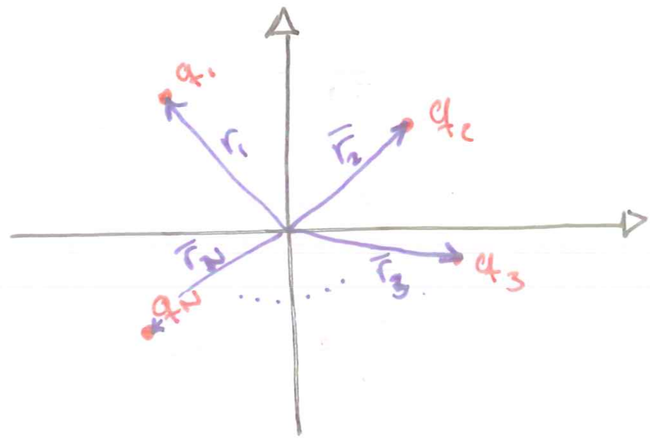
Monopol	$\Rightarrow V \to \frac{1}{r}$	då	$r \to \infty$
Dipol	$\Rightarrow V \to \frac{1}{r^2}$	då	$r \to \infty$
Quadropol	$\Rightarrow V \to \frac{1}{r^3}$	då	$r \to \infty$

Multipol-utvecklingar.

Vi kommer framförallt att räkna på dipoler.

Allmänt då $r \to \infty$

$$\boxed{\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{N} q_i = 0 \Rightarrow \text{Ingen monopol} \\ &\bar{p} = \sum_{i=1}^{N} q_i \bar{r}_i = \text{dipolmoment.} \end{aligned}}$$

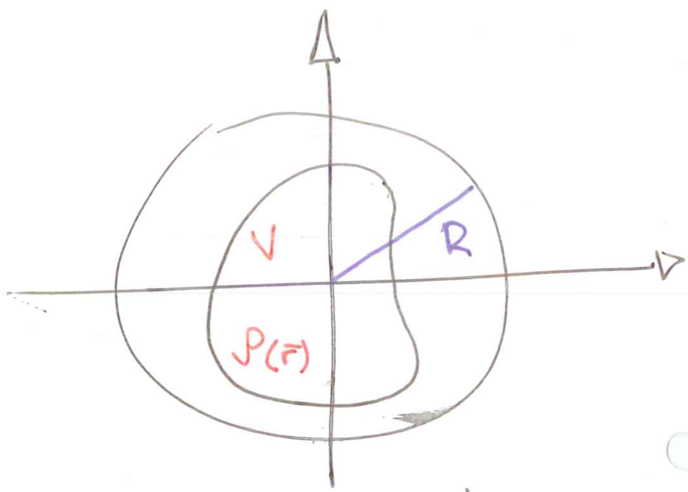


$$V(\bar{r}) = \frac{\bar{p}\,\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$\boxed{\bar{E} = -\nabla V(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(3(\bar{p}\cdot\hat{r})\hat{r} - \bar{p}\right)}$$

Multipolutveckling

$\nabla^2 V(\bar{r}) = 0$ för $r > R$



Allmän lösning:

$$V(\bar{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} q_{lm} r^{-l-1} Y_l^m(\theta, \varphi)$$

$Y_l^m(\theta, \varphi) \sim P_l^m(\cos\theta)\, e^{im\varphi}$ (klotfunktioner)

Detta behöver vi inte kunna ☺.