10/9-2012

(3). Lösningsmetoder för Laplace ekvation: (kap. 3.1).

Den elektriska potentialen V satisfierar $\nabla^2 V(\vec r) = -\rho/\varepsilon_0$ (POISSONS EKVATION).

I källfritt område, $\boxed{\nabla^2 V(\vec r) = 0}$ Laplace ekvation

Lösningar i 1D, 2D, se boken.

Lösningar i 3D.

a) Om alla laddningar är kända

$$V(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{R^3}\frac{\rho(\vec r')}{|\vec r-\vec r'|}dv'$$

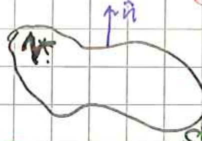
b) Om problemet innehåller randytor med specificerad potential eller laddningsfördelning måste andra metoder användas.

i) Speglingsmetoden (kap 3.2)

ii) Variabelseparation (kap 3.3)

iii) Multipolutvecklingar (kap 3.4)

Entydighetssatser för elektrostatiska problem (kap 3.1.5).



Poissons ekvation $\nabla^2 V(\vec r) = -\rho(\vec r)/\varepsilon_0$ är entydigt lösbar om:

Fall 1. Potentialen V är given, $V=V_0$, på S. (Dirichlets randvillkor).

Fall 2 & 3. Laddningstätheten ρ_s är given, $\frac{\partial V}{\partial n} = -\rho_s/\varepsilon_0$ på S. (Neumanns randvillkor).

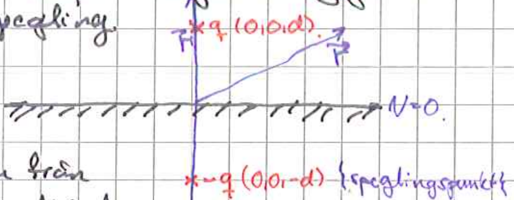
eller

total laddning Q är given på en ledare S.

Entydighet så när som på en konstant.

Speglingsmetoden i plan (kap. 3.2.1 - 3.2.3).

Problem med plana begränsningsytor löses genom spegling.



Potentialen från laddning q plus dess spegelladdning -q för området $z \geq 0$

$$V(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2}} - \frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(z+d)^2}}\right)$$

i) Har rätt källfördelning i $z>0$ ✓

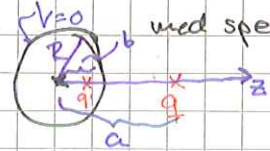
ii) Har rätt randvärde $V=0$ i $z=0$ ✓

⇒ Entydighet ger att detta är lösningen.

Speglingsmetoden i sfär (kap 3.2.4).

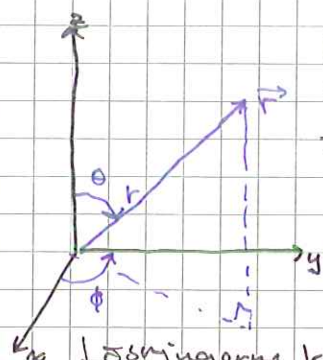
På liknande sätt löses problem med jordad sfär.

Problemet löses med speglingsladdning $q' = -\frac{R}{a}q$ i speglingspunkten $b = \frac{R^2}{a}$.



Lösning av Laplace i sfäriska (kap. 3.3.2).

Sfäriska koordinater (r, θ, ϕ).



Laplace-operatorn i sfäriska koordinater.

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2} = 0.$$

Axialsymmetriska problem $V = V(r,\theta)$, ober. av ϕ.

Lösningarna kan konstrueras med variabelseparation (se boken).

$$\boxed{V(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l + B_l r^{-l-1}\right)P_l(\cos\theta)}$$

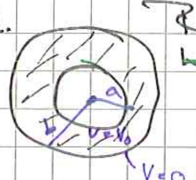
$P_l(x)$ Legendre-polynom, $l \in 0,1,2,\dots$, $x \in [-1,1]$.

A_l och B_l konstanter.

Exempel:

Beräkna potentialen mellan två sfäriska skal, $r=a$, $r=b$

Lösning: Pot. probl. Rotationssymmetriskt ⇒ Endast $l=0$ bidrar.



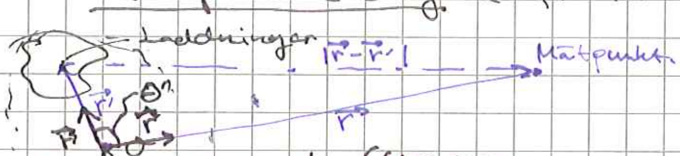
$V(r) = A_0 + B_0\frac{1}{r}$

$V(a) = A_0 + B_0/a = V_0$

$V(b) = A_0 + B_0/b = 0$

$$\Rightarrow V(r) = \frac{V_0 a}{b-a}\left(\frac{b}{r}-1\right). \quad a \leq r \leq b.$$

Multipolutvecklingar (kap. 3.4).



Potentialen $V(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_V \frac{\rho(\vec r')}{|\vec r-\vec r'|}dv'$

$$r > r': \frac{1}{|\vec r-\vec r'|} = \frac{1}{r}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^l P_l(\cos\theta').$$

Genererande funktion för Legendrepolynom.

Potentialen utanför den omskrivna sfären till V ($r > \max_{r'\in V} r'$) leder till

$$V(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{r^{l+1}}\iiint_V \rho(\vec r')\, r'^l P_l(\cos\theta)\, dv'$$

($\cos\theta = \hat r\cdot\hat r'$)

Termerna i summan har namn

$l=0$ monopolterm

$$V_{mono}(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\underbrace{\iiint \rho(\vec r')dv'}_{Q} = \boxed{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{r}}$$

$l=1$. $\boxed{\text{Dipolterm}}$.

$$V_{dip}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\iiint_V \rho(\vec{r}')r' \underbrace{P_1(\cos\theta')}_{\cos\theta = \hat{r}\cdot\hat{r}'} dv'$$

$l=2$ $\boxed{\text{Kvadropolterm}}$:

$l=3$ $\boxed{\text{Oktopolterm}}$.

Dipoltermen Kap(3.4.2).

$$V_{dip}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\iiint_V \rho(\vec{r}')\underbrace{r'\hat{r}'}_{=\vec{r}'}\cdot\hat{r}\,dv' =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\hat{r}\cdot\iiint \rho(\vec{r}')\vec{r}'dv'$$

Elektriskt dipolmoment.

$$\boxed{\vec{p} = \iiint_V \rho(\vec{r}')\vec{r}'dv}$$ Vektor som karaktäriserar laddningsfördelningen.

$$V_{dip}(\vec{r}) = \frac{\hat{r}\cdot\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

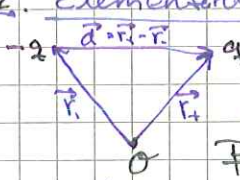
Exempel

Samling av punktladdningar

q_i i $\vec{r}_i$, $i=1,2,3,\ldots n$.

$$\vec{p} = \iiint \rho(\vec{r}')\vec{r}'dv' = \sum_{i=1}^{n} q_i\vec{r}_i.$$

$n=2$. Elementardipol (punktdipol).



$$\vec{p} = \vec{r}_+q - \vec{r}_-q = \vec{d}q$$

Elektriskt fält från punkt-dipol (kap 3.4.4)

$$V_{dip}(\vec{r}) = \frac{\hat{r}\cdot\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$= \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, \quad p = |\vec{p}|.$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla V(\vec{r}) = -\left(\hat{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta} + \hat{\phi}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\phi}\right)$$

$$\begin{cases} E_r = \dfrac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \\ E_\theta = \dfrac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \\ E_\phi = 0. \end{cases}$$