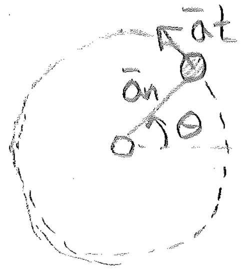
Föreläsning 23 24/03-15

Cirkelrörelse i vektorform



- Jämför med tidigare uttryck:

  $\bar{v} = \dot{s}\bar{e}_t$

  0 i z-led, r = konst.

  $\bar{v} = \dot{r}\bar{e}_r + r\dot{\theta}\bar{e}_\theta + \dot{z}\bar{e}_z = (\text{Cirkelrörelse}) = r\dot{\theta}\bar{e}_\theta$

  $\bar{a} = \ddot{s}\bar{e}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\bar{e}_n$

  $\bar{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\bar{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\bar{e}_\theta + \ddot{z}\bar{e}_z = (\text{Cirkel}) =$
  $= -r\dot{\theta}^2\bar{e}_r + r\ddot{\theta}\bar{e}_\theta$

- Inför beteckningarna:

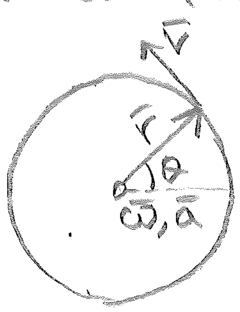
  $\bar{\omega} = \omega\bar{e}_z = \dot{\theta}\bar{e}_z$, ω: vinkelhastighet

  $\bar{\alpha} = \alpha\bar{e}_z = \ddot{\theta}\bar{e}_z$, α: vinkelacceleration

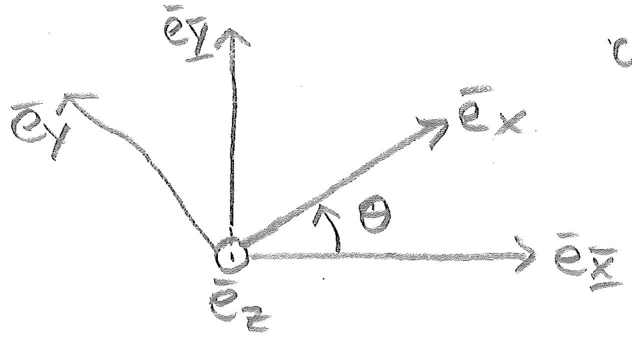
- Omskrivning:

  $\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}$

  $\bar{a} = \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) + \bar{\alpha} + \bar{r}$



Tidsderivata av roterande enhetsvektor



$\omega = \dot\theta$ $\quad (\bar e_{\underline{X}}\ \bar e_{\underline{Y}}\ \bar e_{\underline{Z}})$: Fix

$(\bar e_x\ \bar e_y\ \bar e_z)$: Roterar med vinkelhast. $\bar\omega$.

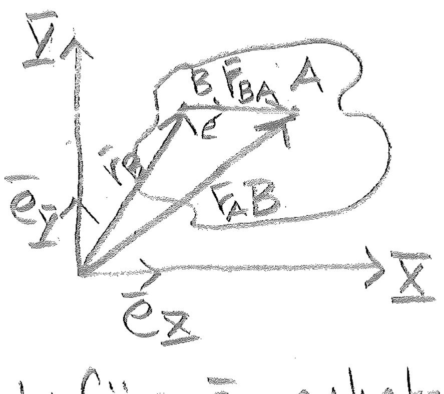
- Uttryck $(\bar e_x\ \bar e_y\ \bar e_z)$ i den fixa basen:

$$\bar e_x = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$$
$$\bar e_y = (-\sin\theta, \cos\theta, 0)$$
$$\bar e_z = (0, 0, 1)$$

- Tidsderivera:

$$\dot{\bar e}_x = \frac{d\bar e_x}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = (-\sin\theta, \cos\theta, 0)\dot\theta = \dot\theta \bar e_y = \bar\omega \times \bar e_x$$
$$\dot{\bar e}_y = \frac{d\bar e_y}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = (-\cos\theta, -\sin\theta, 0)\dot\theta = -\dot\theta \bar e_x = \bar\omega \times \bar e_y$$
$$\dot{\bar e}_z = \frac{d\bar e_z}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = (0, 0, 0)\dot\theta = \bar\omega \times \bar e_z$$

Sambandsformeln för hastighet och acceleration:



B: Stel kropp

$|\bar r_{BA}|$: konstant

Posi: $\bar r_A = \bar r_B + \bar r_{BA}$

Hast: $\dot{\bar r}_A = \dot{\bar r}_B + \dot{\bar r}_{BA} \Rightarrow \bar v_A = \bar v_B + \dot{\bar r}_{BA}$

Vad innebär $\dot{\bar r}_{BA}$?

Inför $\bar e$: enhetsvektor i $\bar r_{BA}$:s riktning.

Uttnyttja det härledda sambandet: $\dot{\bar e} = \omega \times \bar e$

$$\dot{\bar r}_{BA} = (|\bar r_{BA}|\dot{\bar e}) = |\bar r_{BA}|\dot{\bar e} = |\bar r_{BA}|\bar\omega \times \bar e =$$
$$= \bar\omega \times |\bar r_{BA}|\bar e = \bar\omega \times \bar r_{BA}$$

$\Longrightarrow$ Sambandsformeln för hastigheter:

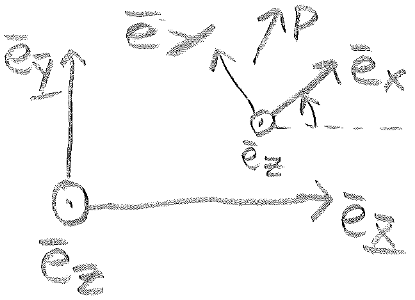
$$\bar v_A = \bar v_B + \bar\omega \times \bar r_{BA}$$ — Jämför med cirkelrörelse

Tids derivera sambandsformeln för hastigheter:

$$\dot{\bar{v}}_A = \dot{\bar{v}}_B + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r}_{BA} + \bar{\omega} \times \underbrace{\dot{\bar{r}}_{BA}}_{\bar{\omega} \times \bar{r}_{BA}} \Rightarrow \text{Sambandsf. för acc.}$$

$$\bar{a}_A = \bar{a}_B + \underbrace{\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_{BA}) + \alpha \times \bar{r}_{BA}}_{\text{Jämför med cirkelrörelse}}$$

Sambandet mellan tidsderivator i olika referenssys:



$(\bar{e}_X\ \bar{e}_Y\ \bar{e}_Z)$: Fix

$(\bar{e}_x\ \bar{e}_y\ \bar{e}_z)$: Roterar med $\bar{\omega} = \omega \bar{e}_z$

$$\bar{P} = P_X \bar{e}_X + P_Y \bar{e}_Y + P_Z \bar{e}_Z = $$
$$= P_x \bar{e}_x + P_y \bar{e}_y + P_z \bar{e}_z$$

- Tids derivata i rörligt system:

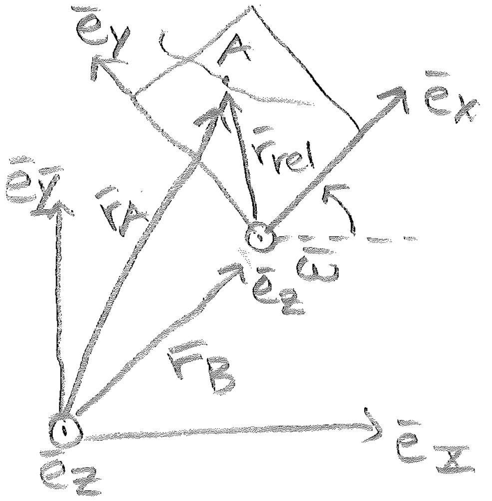
$$\dot{\bar{P}}(\bar{e}_x\ \bar{e}_y\ \bar{e}_z) = \dot{P}_x \bar{e}_x + \dot{P}_y \bar{e}_y + \dot{P}_z \bar{e}_z$$

Inne håller ingen information om rotationen $(\bar{e}_x\ \bar{e}_y\ \bar{e}_z)$

- Tids derivata i fixt system:

$$\dot{\bar{P}}(\bar{e}_X\ \bar{e}_Y\ \bar{e}_Z) = \dot{P}_X \bar{e}_X + \dot{P}_Y \bar{e}_Y + \dot{P}_Z \bar{e}_Z =$$
$$= \dot{P}_x \bar{e}_x + \dot{P}_y \bar{e}_y + \dot{P}_z \bar{e}_z + P_x \dot{\bar{e}}_x + P_y \dot{\bar{e}}_y + P_z \dot{\bar{e}}_z =$$
$$= \dot{\bar{P}}(\bar{e}_x\ \bar{e}_y\ \bar{e}_z) + \bar{\omega} \times (P_x \bar{e}_x + P_y \bar{e}_y + P_z \bar{e}_z) =$$
$$= \dot{\bar{P}}(\bar{e}_x\ \bar{e}_y\ \bar{e}_z) + \bar{\omega} \times \bar{P}$$

Coriolis teorem



- Basen $(\bar{e}_x\ \bar{e}_y\ \bar{e}_z)_B$ roterar med vinkelhastighet $\bar{\omega}$ relativt basen $(\bar{e}_X\ \bar{e}_Y\ \bar{e}_Z)_0$.
- A rör sig både i förhållande till $(\bar{e}_X\ \bar{e}_Y\ \bar{e}_Z)_0$ och $(\bar{e}_x\ \bar{e}_y\ \bar{e}_z)_B$.
- Storheter som mäts i det roterande systemet indiceras "rel"
- Position: $\bar{r}_A = \bar{r}_B + \bar{r}_{rel}$
- Hastighet: $\dot{\bar{r}}_A = \dot{\bar{r}}_B + \dot{\bar{r}}_{rel} \Rightarrow \bar{v}_A = \bar{v}_B + \dot{\bar{r}}_{rel}$

Varför?
- Vektorerna $\bar{r}_A$ och $\bar{r}_B$ mäts och deriveras i ett fixt system.
- Vektorn $\bar{r}_{rel}$ mäts i ett rörligt system och deriveras i ett fixt system.

Två delar i $\dot{\bar{r}}_{rel}$, $\dot{\bar{r}}_{rel} = \underbrace{\dot{\bar{r}}_{rel}(\bar{e}_x\ \bar{e}_y\ \bar{e}_z)_B}_{\bar{v}_{rel}} + \bar{\omega} \times \bar{r}_{rel}$

$$\bar{v}_A = \underbrace{\bar{v}_B + \bar{\omega} \times \bar{r}_{rel}}_{\bar{v}_{sp}\text{ : Systempunktens hastighet}} + \bar{v}_{rel}$$