Föreläsning 2

Tidsdiskreta system (fort.)

$$(1) \quad \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{k-1} \\ y_{k-1} \end{pmatrix} \quad \text{för } k = 1, 2, \ldots$$

dvs $\bar{v}_k = A \bar{v}_{k-1}$

har en allmän lösning $\bar{v}_k = c_1 \lambda_1^k \bar{s}_1 + c_2 \lambda_2^k \bar{s}_2$

då A har två linjärt oberoende egenvektorer $\bar{s}_1$ och $\bar{s}_2$.

Den är en generalisering av följande lösning:

$x_k = 3 x_{k-1}$ har lösningar $x_k = c_1 \cdot 3^k$

Vi vet också att $x_k = 3x_{k-1} + 2$ har lösningar $x_k = x_k^h + x_k^p$

Nu gäller

Sats Den inhomogena rekursionsformeln

$$(2) \qquad \bar{v}_k = A\bar{v}_{k-1} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \leftarrow \text{en konstantvektor}$$

där $k = 1, 2, \ldots$

har en allmän lösning

$$\bar{v}_k = \underbrace{\bar{v}_k^h}_{\text{en allmän lösning till (1)}} + \bar{v}_k^p \leftarrow \text{en partikulärlösning till (2)}$$

Uppgift Bestäm en $\bar{v}_k^p$

Lösningsmetod:

Vi letar efter en konstantvektor $\bar{v}_k^p = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix}$ som är en lösning till (2)

Då är $\begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix} - A \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \iff (I - A)\begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix} = (I - A)^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad \text{om } (I-A)^{-1} \text{ existerar}$$

Sats (2) har en partikulärlösning $\bar{v}_k^p = (I-A)^{-1}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ om $\det(I-A) \neq 0$ dvs talet 1 inte är ett egenvärde till A.

Ex 4.1 Lös $\begin{cases} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{k-1} \\ y_{k-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{där } k = 1, 2, \ldots \\ \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 11 \\ 9 \end{pmatrix} \end{cases}$

Lösn steg 1. Egenvärde: $\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda+2 & -1 \\ -1 & \lambda+2 \end{vmatrix} = (\lambda+2)^2 - 1 = 0$

$\Rightarrow \lambda = -2 \pm \sqrt{1}$ dvs $\lambda_1 = -1$ och $\lambda_2 = -3$

Egenvektor: För $\lambda_1 = -1$ löser vi $\begin{pmatrix} -1+2 & -1 \\ -1 & -1+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Sätt $\bar{s}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

För $\lambda_2 = -3$ löser vi $\begin{pmatrix} -3+2 & -1 \\ -1 & -3+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Sätt $\bar{s}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\therefore$ Den allmänna lösningen till homogena systemet är

$$\bar{v}_k^h = c_1(-1)^k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2(-3)^k\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

steg 2 En partikulärlösning

$$\bar{v}_k^p = (I-A)^{-1}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & -1 \\ -1 & 1+2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$$

$\therefore$ Den allmänna lösningen till inhomogena ekvationen är

$$\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = c_1(-1)^k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2(-3)^k\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

steg 3 $c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 11 \\ 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} c_1 = 1 \\ c_2 = 0 \end{matrix}$

Den sökta lösningen är $\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = (-1)^k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Kap 3 — Linjära differentialekvationer för matriser

En linjär differentialekvation

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t)\end{pmatrix}$$

dvs $\frac{d}{dt}\bar{x}(t) = A\bar{x}(t) + \bar{f}(t)$

sägs vara homogen om $\bar{f}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0\end{pmatrix} \overset{\text{skriv}}{=} \bar{0}$

Ex 2.2 Lös $\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2\end{pmatrix}$

Lösn

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \lambda_1 x_1 & \text{--- (1)} \\ \frac{dx_2}{dt} = \lambda_2 x_2 & \text{--- (2)} \end{cases}$$

Vi (1) $\frac{dx_1}{dt} - \lambda_1 x_1 = 0$ $\quad \int -\lambda_1 dt = e^{-\lambda_1 t}$

En integrerande faktor e

$$\left(e^{-\lambda_1 t} x_1(t)\right)' = 0 \Rightarrow e^{-\lambda_1 t} x_1(t) = C_1 \Rightarrow x_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}$$

Analogt har vi $x_2(t) = C_2 e^{\lambda_2 t}$

∴ Den sökta lösningen är $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t}\end{pmatrix}$

Fråga Hur löser vi $\frac{d\bar{x}}{dt} = A\bar{x}$ för en vanlig diagonaliserbar matris A.

Lösningsmetod A är diagonaliserbar $\Leftrightarrow$ A har två linjärt oberoende egenvektorer $\bar{s}_1$ och $\bar{s}_2$ med egenvärde λ_1 och λ_2.

Skriv $S = (\bar{s}_1 \ \bar{s}_2)$

Då är $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$

$$A = S\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}S^{-1}$$

Så blir ekvationen $\frac{d\bar{x}}{dt} = \underbrace{S\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}S^{-1}}_{A}\bar{x}$

$$S^{-1}\frac{d\bar{x}}{dt} = \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}S^{-1}\bar{x}$$

$$\frac{d}{dt}\left(S^{-1}\bar{x}\right) = \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\left(S^{-1}\bar{x}\right)$$

$$\boxed{\begin{cases} x_1(0) = 5\\ x_2(0) = 6\end{cases} \quad \hat{x}_0 = S^{-1}\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}}$$

Sätt $\hat{x} = S^{-1}\bar{x}$ så får $\frac{d}{dt}\hat{x} = \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\hat{x}$

som har lösningar

$$\hat{x} = \begin{pmatrix}c_1 e^{\lambda_1 t}\\ c_2 e^{\lambda_2 t}\end{pmatrix} \quad \text{ty, Ex 2.2}$$

$$\therefore \quad S\hat{x} = \bar{x}$$

$$\bar{x} = \begin{pmatrix}\bar{s}_1 & \bar{s}_2\end{pmatrix}\hat{x} = \begin{pmatrix}\bar{s}_1 & \bar{s}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1 e^{\lambda_1 t}\\ c_2 e^{\lambda_2 t}\end{pmatrix}$$

$$= c_1 e^{\lambda_1 t}\bar{s}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\bar{s}_2$$

__Sats__ $\frac{d\bar{x}}{dt} = A\bar{x}$ har en allmän lösning $\bar{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\bar{s}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\bar{s}_2$

__Ex 2.3__ Lös $\frac{d\bar{x}}{dt} = \begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}\bar{x}$

__Lösn__ Ur Ex 2.1 vet vi att A har

$\bar{s}_2 = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ med $\lambda_2 = -3$

och $\bar{s}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ med $\lambda_1 = -1$

Sats ger att $\bar{x}(t) = c_1 e^{-1\cdot t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + c_2 e^{-3t}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$