17/1-2012

PUMP:
VENTIL:

(2) Dynamiska system

$$u \rightarrow \boxed{?} \rightarrow y$$

Via massbalans, energibalans etc. kan processens dynamik beskrivas med en differentialekvation.

$$(*) \quad \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots = b \frac{d^n u}{dt^n} + b_1 \frac{d^{n-1} u}{dt^{n-1}} \dots$$

Tillståndsform

Inför tillstånd $x_1, x_2, \dots, x_n$. Då kan (*) skrivas som

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, \dots, x_n, u) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, \dots, x_n, u) \end{cases} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$y = g(x_1, \dots, x_n, u) \qquad f = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \dot{x} &= f(x,u) \\ y &= g(x,u) \end{aligned}}$$

Ex) $\ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_2 y = bu$

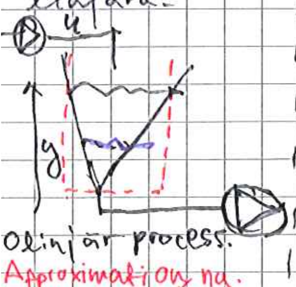
$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = \dot{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{y} = x_2 \\ \dot{x}_2 &= \ddot{y} = -a_1 \dot{y} - a_2 y + bu \\ &= -a_1 x_2 - a_2 x_1 + bu \end{aligned}$$

$$y = x_1 \qquad \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} u \qquad y = x_1 = (1 \;\; 0)\, x$$

Allmänt: $\dot{x} = Ax + Bu$
$y = Cx + Du$

En förutsättning är att f och g är linjära.

(2)



Olinjär process.
Approximation ng.
(Linjärisering)

Linjärisering

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u) \\ y = g(x,u) \end{cases}$$

I) Bestäm stationär punkt. (x_0, u_0): $\dot{x}_0 = 0 \Leftrightarrow f(x_0, u_0) = 0$

II) Taylorserieutveckla f och g runt (x_0, u_0). Behåll enbart första ordningens termer:

$$f(x,u) \approx \underbrace{f(x_0,u_0)}_{=0} + \frac{\partial}{\partial x} f(x_0,u_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial}{\partial u} f(x_0,u_0)(u-u_0)$$

$$g(x,u) \approx \underbrace{g(x_0,u_0)}_{=y_0} + \frac{\partial}{\partial x} g(x_0,u_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial}{\partial u} g(x_0,u_0)(u-u_0)$$

III) Inför nya variabler:

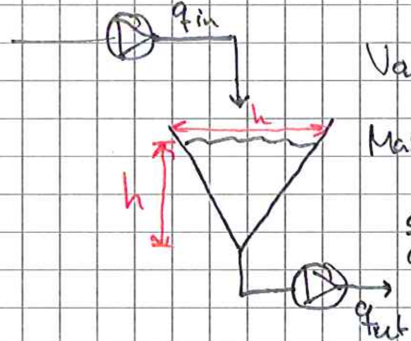
$$\Delta x = x - x_0; \quad \Delta u = u - u_0; \quad \Delta y = y - y_0.$$

IV) Tillståndsekvationer i de nya variablerna:

$$\Delta \dot{x} = \dot{x} - \dot{x}_0 = \dot{x} = f(x,u) \approx \frac{\partial}{\partial x} f(x_0,u_0) \Delta x + \frac{\partial}{\partial u} f(x_0,u_0) \Delta u = A\Delta x + B\Delta u$$

$$\Delta y = y - y_0 = g(x,u) - y_0 \approx \frac{\partial}{\partial x} g(x_0,u_0) \Delta x + \frac{\partial}{\partial u} g(x_0,u_0) \Delta u = C\Delta x + D\Delta u$$

Ex)



Volym V: $\frac{\pi h^3}{12}$

Massbalans: $\frac{dV}{dt} = q_{in} - q_{ut}$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \cdot \frac{dh}{dt} = \frac{\pi h^2}{4} \cdot \frac{dh}{dt}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dh}{dt} = \frac{4}{\pi h^2} \cdot (q_{in} - q_{ut})}$$

$y = h$; $u = q_{in}$; $x = h$; q_{ut} = konstant.

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{4}{\pi x^2} \cdot (u - q_{ut}) \; (= f(x,u)) \\ y = x \; (= g(x,u)) \end{cases}$$

I) $\dot{x} = 0 \Leftrightarrow f(x_0, u_0) = 0 \Rightarrow u_0 = q_{ut}$
x_0 = godtycklig nivå

II) $f(x,u) \approx -\frac{8}{\pi x_0^3} \underbrace{(u_0 - q_{ut})}_{=0} (x - x_0) + \frac{4}{\pi x_0^2} (u - u_0)$

$g(x,u) \approx 1 \cdot (x - x_0) + 0 \cdot (u - u_0)$

III) $\Delta x = x - x_0$; $\Delta u = u - u_0$; $\Delta y = y - y_0$

IV) $\Delta \dot{x} = f(x,u) \approx \frac{4}{\pi x_0^2} \cdot \Delta u$

$\Delta y = g(x,u) - y_0 = \Delta x$

Laplacetransform

Def: $f(t)$. $\mathcal{L}(f(t)) = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$

$\mathcal{L}(\dot{f}(t)) = s \cdot F(s)$ (om $f(0) = 0$)

Ex) $\ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_2 y = b_1 \dot{u} + b_2 u$ $\quad (y(0) = \dot{y}(0) = u(0))$

Laplace

$s^2 Y + a_1 s Y + a_2 Y = b_1 s U + b_2 U$

$(s^2 + a_1 s + a_2) Y = (b_1 s + b_2) U$

$\Rightarrow Y = \dfrac{b_1 s + b_2}{s^2 + a_1 s + a_2} U \rightarrow G(s)$ överföringsfunktionen.

$G(s) = \dfrac{Q(s)}{P(s)}$ Rötter till $Q(s)$ kallas nollställen

Rötter till $P(s)$ kallas poler.

Ex) $G = \dfrac{s+1}{(s+2)(s+3)}$ Nollställe: -1

Poler: $-2, -3$.