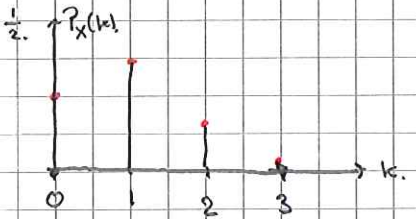
29/1 ② 2013

Stokastiska Variabler

Ex) Keno-3 (F2-3).

a) $\frac{1}{2}$



$P(\text{vinna}) = P(X \geq 2) = \sum_{k \geq 2} p_X(k) = p_X(2) + p_X(3) =$

$= 0{,}17 + 0{,}02 = 0{,}19.$

b) Låt $V = X \geq 2$, dvs händelsen att vinna

$P(X=2 \mid V) = \frac{P(X=2 \cap V)}{P(X \geq 2)} = \frac{P(V \mid X=2) P(X=2)}{P(V)} = \frac{1 \cdot 0{,}17}{0{,}19} = 0{,}89$

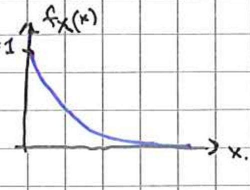
Ex) Slå en tärning 5 ggr.
Låt X = antalet sexor. Bestäm $P(X=3)$.

komb	slh.	
⑥ ⑥ ⑥ ⓧ ⓧ	$\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(1-\frac{1}{6}\right)^2$	$\binom{5}{3} = 10$ komb.
⑥ ⑥ ⓧ ⑥ ⓧ	$\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(1-\frac{1}{6}\right)^2$	Totalt:
.		$\binom{5}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(1-\frac{1}{6}\right)^2 =$
.		$= 10 \cdot \frac{1^3 \cdot 5^2}{6^3 \cdot 6^2} \approx 0{,}032.$

Ex) Glödlampa (F2-12).

X = livslängd i år hos en glödlampa.

$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ $\quad$ generellt: $\begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$ $\lambda = 1$ här.



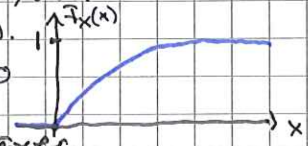
a) $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

$x < 0$: $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0.$

$x \geq 0$: $F_X(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda t}\,dt =$

$= 0 + \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^x = 1 - e^{-\lambda x}$, dvs.

$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0. \\ 0, & x < 0 \end{cases}$



λ bestämmer hur snabbt den växer.

b) Slh. att lampan lyser minst 2 år.

$P(X \geq 2) = \left(\int_2^{\infty} f_X(x)\,dx\right) = 1 - P(X < 2) \overset{X \text{ kont.}}{=} 1 - P(X \leq 2) =$

$= 1 - F_X(2) = 1 - (1 - e^{-\lambda \cdot 2}) = [\lambda = 1] = e^{-2} \approx 0{,}22.$

c) $P(X \geq 3 \mid X \geq 1) = \frac{P(X \geq 3 \cap X \geq 1)}{P(X \geq 1)} = \frac{P(X \geq 1 \mid X \geq 3) P(X \geq 3)}{P(X \geq 1)} =$

$= \frac{1 \cdot P(X \geq 3)}{P(X \geq 1)} = \frac{1 - F_X(3)}{1 - F_X(1)} = \frac{1 - (1 - e^{-3})}{1 - (1 - e^{-1})} = \frac{e^{-3}}{e^{-1}} = e^{-3+1} =$

$= e^{-2} \approx 0{,}22.$

Egenskap: Exponentialfördelningen är minneslös.

Ex) Glödlampa forts (F2-14).

Bestäm x_α om $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$.

Tag t.ex. $x_\alpha = F_X^{-1}(1-\alpha)$

$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x} = y.$

Lös ut x som funktion av y.

$e^{-\lambda x} = 1 - y$; $\ln e^{-\lambda x} = \ln(1-y)$

$-\lambda x = \ln(1-y)$

$x = -\frac{1}{\lambda} \ln(1-y).$

$\Rightarrow F_X^{-1}(y) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1-y).$ $\Rightarrow x_\alpha = F_X^{-1}(1-\alpha) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1-(1-\alpha)) =$

$= -\frac{1}{\lambda} \ln \alpha = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{1}{\alpha}.$

$\lambda = 1$

$\alpha = 0{,}25$ $\quad x_{0{,}25} = 1{,}39.$

$\alpha = 0{,}50$ $\quad x_{0{,}50} = 0{,}69.$

$\alpha = 0{,}75$ $\quad x_{0{,}75} = 0{,}29.$

29/1 - 2013.

(2)

Stokastisk variabel

En *stokastisk variabel* eller *slumpvariabel* är ett *tal* vars värde styrs av slumpen (en funktion $\Omega \to R$). Bet $X, Y, \ldots$. Den är

- *Diskret* – om den kan anta ett ändligt antal värden (ex $1, 3, \pi$), eller uppräkneligt oändligt (ex $0, 1, 2, \ldots$). Ex
  - X = **Antal** sönderfallande partiklar i ett radioaktivt ämne under 1 s
  - Y = **Antal** personer av 100 som svarar ja på frågan "Skulle du rösta ja om det vore EMU-val i dag?"
- *Kontinuerlig* – om den kan anta alla reella tal i ett intervall, typsikt resultatet av en mätning. Ex
  - X = Hastigheten hos nästa bil som passerar
  - Y = Mätfel vid en mätning

Sannolikhetsfunktion

För en diskret s.v. X definieras *sannolikhetsfunktionen* som

$$p_X(k) = P(X = k)$$

Några egenskaper

- $0 \le p_X(k) \le 1$, eftersom det är sannolikheter
- $P(a \le X \le b) = \sum_{k=a}^{b} p_X(k)$
- $\sum_{\text{alla } k} p_X(k) = 1$. Slh att X skall anta *något* värde är 1.

Observera att en stokastisk variabel jämförd med ett tal är en händelse.

Ex. Keno-3

I Keno-3 väljs 3 av 70 nr. Vid dragning väljs 20 av dessa 70 ut som vinsnummer. Låt X = Antal vinstnr man prickar in. X sannolikhetsfunktion är

k	0	1	2	3
$p_X(k)$	0.36	0.45	0.17	0.02

Två vinstnr ger 5 kr och 3 vinstnr ger 90 kr.

a) Vad är sannolikheten att vinna något?

b) Vad är sannolikheten att man fått två vinstnummer under förutsättning att man vunnit?

Några diskreta standardfördelningar

Binomialfördelning

X är binomialförd. med param. n & p.

Beteckning $\boxed{X \in Bin(n, p)}$

Förekomst Ett slumpmässigt försök med en händelse A där $P(A) = p$ upprepas n oberoende ggr, X = Antal ggr A inträffar.

Sannolikhetsfunktion

$$p_X(k) = P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

Poissonfördelning

Beteckning $\boxed{X \in Po(\mu)}$

$$p_X(k) = e^{-\mu} \cdot \frac{\mu^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

ffg-fördelning

Ej ett fixt antal ggr.

Beteckning $\boxed{X \in \text{ffg}(p)}$

Förekomst Försöket med händelsen A upprepas oberoende. X=Antal försök *tills* A inträffar för första gången.

Sannolikhetsfunktion

$$p_X(k) = p(1-p)^{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Geometrisk fördelning

Beteckning $\boxed{Y \in Ge(p)}$

Förekomst Försöket upprepas. Y=Antal försök *innan* A inträffar första gången (dvs $Y = X - 1$).

Sannolikhetsfunktion

$$p_Y(k) = p(1-p)^k, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Täthetsfunktion

En kontinuerlig s.v X har i stället en *täthetsfunktion* $f_X(x)$. Egenskaper:

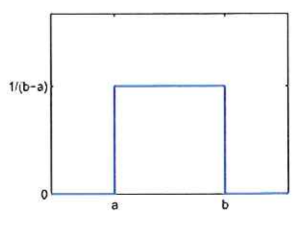
- $f_X(x) \ge 0$
- $P(a \le X \le b) = \int_a^b f_X(x)\,dx$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$. Slh att X skall anta *något* värde är 1.

Rektangel- eller likformig fördelning

Beteckning $X \in R(a, b)$ eller $X \in U(a, b)$ (eng. uniform)

Täthetsfunktion

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a}, \quad a \le x \le b$$

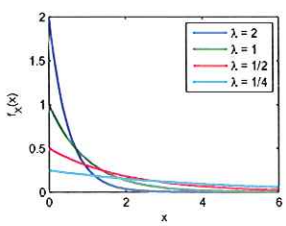


Exponentialfördelning

Beteckning $X \in Exp(\lambda)$ eller $X \in \Gamma(1, \lambda)$

Täthetsfunktion

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \ge 0$$



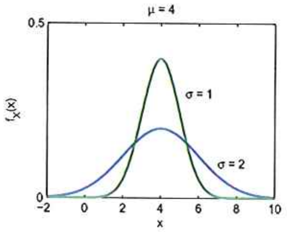
Anm. I bland (t.ex i Matlab) används bet. $Exp(\mu)$ där $\mu = 1/\lambda$.

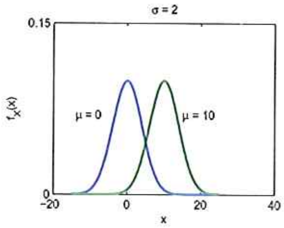
Normalfördelning

Beteckning $X \in N(\mu, \sigma)$

Täthetsfunktion

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \qquad -\infty < x < \infty$$





Fördelningsfunktion

För att räkna ut sannolikheter behöver man summera $p_X(k)$ eller integrera $f_X(x)$. Det kan därför vara användbart att ha en *fördelningsfunktion* (borde heta kumulativ förd.funk.)

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

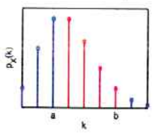
Egenskaper

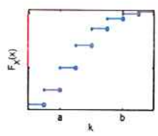
- $0 \leq F_X(x) \leq 1$, eftersom det är en sannolikhet
- $F_X(x)$ är växande.

Diskret	Kontinuerlig
$F_X(x) = \sum_{k \leq x} p_X(k)$	$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$
$p_X(k) = F_X(k) - F_X(k-1)$	$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$

Diskret

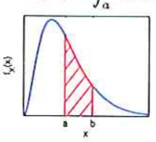
$$P(a < X \leq b) = \sum_{k=a+1}^{b} p_X(k) \qquad P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$$

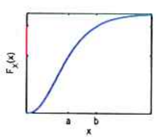




Kontinuerligt

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f_X(x)\,dx \qquad P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$$





Ex. Glödlampa

Låt X = Livslängden hos en glödlampa i år. Antag att fördelningen för X beskrivs av följande täthetsfunktion

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

a) Beräkna $F_X(x)$ samt skissa den och $f_X(x)$.

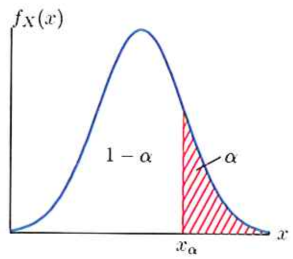
b) Beräkna sannolikheten att lampan håller minst två år.

c) Om vi sett att lampan lyst ett år, vad är sannolikheten att den lyser två år till?

α-kvantil, x_α

En kvantil, x_α, till en s.v. X är en gräns som överskrids med slh α. Den fås som lösning till någon av följande ekvationer.

$$F_X(x_\alpha) = 1 - \alpha \iff \int_{-\infty}^{x_\alpha} f_X(x)\,dx = 1 - \alpha \iff \int_{x_\alpha}^{\infty} f_X(x)\,dx = \alpha$$



Eller direkt ur $x_\alpha = F_X^{-1}(1 - \alpha)$

Ex. Glödlampa (forts)

a) Beräkna kvantilen x_α som funktion av α

b) Beräkna numeriskt de tre kvartilerna $x_{0.25}$, $x_{0.50}$ och $x_{0.75}$. ($x_{0.50}$ kallas även median)

c) Gör en konkret tolkning av $x_{0.25}$.

Sammanfattning

Stokastisk variabel

- X är diskret om den kan anta ett uppräkneligt antal värden, typiskt positiva heltal.
- X är kontinuerlig om den kan anta alla rella tal i ett intervall.

Fördelningsbeskrivande funktioner

- Sannolikhetsfunktion $p_X(k) = P(X = k)$ om X är diskret.
- Täthetsfunktion $f_X(x)$ om X är kontinuelrig.
- Fördelningsfunktion $F_X(x) = P(X \leq x)$, bra att räkna ut sannolikheter med.

En α-kvantil, x_α, är en gräns som överskrids med slh α.