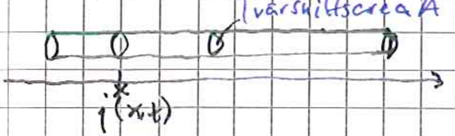
18/1-2012

(2) Konserveringsmodell - mängd av någon substans i ett område Ω.

Kvantitetsökning i Ω = flödet in i Ω + produktion i Ω.

1-dimensionellt område - långt smalt rör.



$q(x,t)$: densitet kg/m^3

$j(x,t)$: mängd som passerar x kg/m^2t

$k(x,t)$ mängd som tillförs x.

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_x^{x+h} q(y,t)A\,dy = j(x,t)A - j(x+h,t)A + \int k(y,t)A\,dy$$

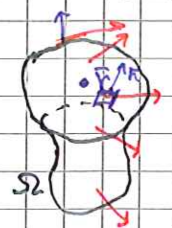
$$\underbrace{\frac{1}{h}\int_x^{x+h}\frac{\partial q}{\partial t}(y,t)\cancel{A}\,dy}_{\to\frac{\partial q}{\partial t}(x,t)} = \underbrace{\frac{j(x,t)\cancel{A}-j(x+h,t)\cancel{A}}{h}}_{\to -\frac{\partial j}{\partial x}(x,t)} + \underbrace{\frac{1}{h}\int k(y,t)\cancel{A}\,dy}_{\to k(x,t)}$$

Vi sätter $h \to 0$:

$$\therefore \partial_t q = -\frac{\partial j}{\partial x} + k \Rightarrow \boxed{\partial_t q + \partial_x j = k}$$

Kontinuitetsekvationen - fundamental!

3-dimensioner: $(x,y,z) = \bar{r}$



$q(\bar{r},t) = q(x,y,z,t)$ Densitet

$k(\bar{r},t)$ Produktion

$\bar{j}(\bar{r},t)$ Strömtäthet.
$= (j_1(x,y,z,t), j_2(x,y,z,t), j_3(x,y,z,t))$

Motsvarande ekvation:

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_\Omega q(\bar{r},t)\,dV = \iint_{\partial\Omega} \bar{j}(\bar{r},t)\cdot\overbrace{\bar{n}\,dS}^{d\bar{S}} + \iiint_\Omega k(\bar{r},t)\,dV$$

Vi gör om dubbelintegralen till en trippelintegral: $= \iiint_\Omega \operatorname{div}\bar{j}\,dV$

$(\operatorname{div}\bar{j} = \partial_x j_1 + \partial_y j_2 + \partial_z j_3)$

$$\iiint_\Omega \partial_t q(\bar{r},t)\,dV = -\iiint_\Omega \operatorname{div}\bar{j}\,dV + \iiint_\Omega k\,dV$$

$$\iiint_\Omega \partial_t q + \operatorname{div}\bar{j} - k\,dV = 0$$

$\therefore \boxed{\partial_t q + \operatorname{div}\bar{j} = k}$ Kontinuitetsekvationen i 3 dimensioner.

Strömning Ficks lag $\bar{j} = -D\operatorname{grad} q =$ (D konstant)

Δq $\qquad = \boxed{-D\nabla q}$

vilket ger $\boxed{\partial_t q + \operatorname{div}(-D\nabla q) = k}$: Diffusionsekvation

D: diffusionskonstant.

Ofta är D oberoende av läge ~~och~~:

$$\partial_t q - D\operatorname{div}(\nabla q) = k$$

$$= \nabla\cdot\nabla q = \Delta q = \partial_x^2 q + \partial_y^2 q + \partial_z^2 q \Rightarrow$$

$\partial_t q - D\nabla q = 0$ $\quad$ Om $k = 0$. (oftast i tillämpningar)

Diffussionsekvation / Värmeledningsekvation

Efter lång tid har fördelningen av substans stabiliserats

Förändras inte längre med tiden - stationärt tillstånd.

$\Rightarrow \partial_t q = 0 \quad \therefore -D\Delta q = k$ Poissons ekvation.

Ingen produktion: $\Delta q = 0$ Laplace ekvation.

1-dim: $\partial^2 q = 0$

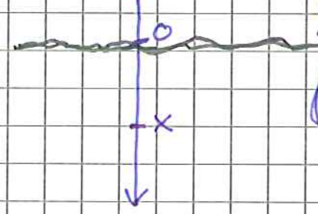
2-dim: $\partial_x^2 q + \partial_y^2 q = 0$

Ex) - Sjö. Ämne sprids ut på ytan.

Ämnets koncentration vid ytan hela tiden C från start.

- Vad blir koncentrationen djupt nere i sjön?

Modellering.



$$\begin{cases} \partial_t q - D\partial_x^2 q = 0 & x>0 \\ & t>0 \\ q(0,t) = C & \\ q(x,0) = 0 & \end{cases}$$