Föreläsning 2

3/9-2015

Repetition: $\bar{E} = \lim_{q \to 0} \frac{\bar{F}}{q}$

Gauss lag: $\int_S \bar{E} \cdot \hat{n}\, ds = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho\, dv = \frac{Q_{\text{innanför}}}{\varepsilon_0}$

$\bar{E} = -\nabla V$

$U = V(r_1) - V(r_2)$ (spänning)

Randvillkor vid skiljeyta

Dirchlet: $V_1(\bar{r}) - V_2(\bar{r}) = 0$

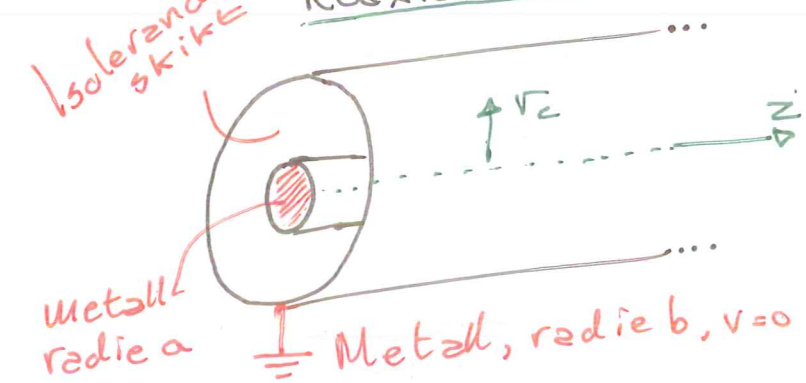
Neumann: $V_1'(\bar{r}) - V_2'(\bar{r}) = 0$

Poissons ekvation

$$\begin{cases} \nabla \cdot \bar{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \bar{E} = -\nabla V \end{cases} \Rightarrow \nabla \cdot \nabla V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow \boxed{\nabla^2 V(r) = -\frac{\rho(\bar{r})}{\varepsilon_0}}$$

Ex

Koaxialkabel



Vi använder cylinderkoordinater med axialsymmetri.

Låt $V(a) = V_0$, $V(b) = 0$

$\boxed{\text{Bestäm } V(r_c),\ a \le r_c \le b}$

inga laddn. $\rho = 0$

DE: $\nabla^2 V(r_c) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{r_c} \frac{\partial}{\partial r_c} r_c \frac{\partial V}{\partial r_c} = 0$, Denna löses lätt mha två randvillkor

$\Rightarrow r_c \cdot \frac{\partial V}{\partial r_c} = C_1 \Leftrightarrow \frac{\partial V}{\partial r_c} = \frac{C_1}{r_c}$

$\Rightarrow \boxed{V(r_c) = C_1 \ln r_c + C_2}$

$V(a) = V_0,\ V(b) = 0 \Rightarrow$ svar: $\boxed{V(r_c) = V_0 \frac{\ln\left(\frac{r_c}{b}\right)}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)}}$

Elfältet kan nu tas fram:

$$\bar{E}(r_c) = -\nabla V(r_c) = -\hat{r}_c \frac{\delta V(r_c)}{\delta r_c} = \boxed{-V_0 \frac{1}{r_c \ln \frac{a}{b}} \hat{r}}$$

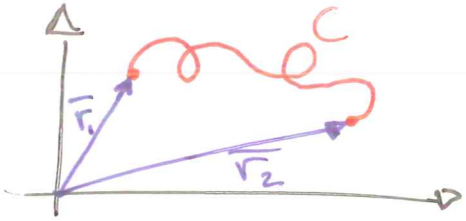
och Fältlinjer kan ritas

Arbete och Energi

$\bar{F} = Q\bar{E}$ = kraft på Q

Flytta Q från $\bar{r}_1$ till $\bar{r}_2$ längs en kurva C.

Vägen spelar ingen roll eftersom vi har ett konservativt fält.



⇒ Systemet utför arbetet:

$$\boxed{A = \int_C \bar{F}\, d\bar{l} = Q \int_C \bar{E}\, d\bar{l} = Q\left(V(\bar{r}_1) - V(\bar{r}_2)\right)}$$

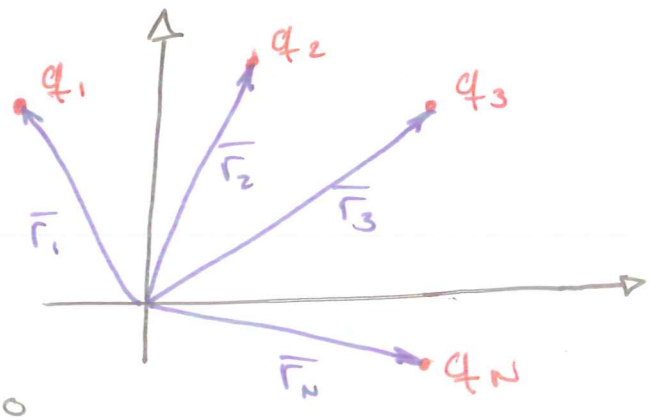
$Q\,V(\bar{r}_1)$: Q:s potentiella energi i $\bar{r}_1$.

$Q\,V(\bar{r}_2)$: Q:s potentiella energi i $\bar{r}_2$.

FAKTARUTA

Energi för system av laddningar

Systemets energi: W = arbetet vi utför för att flytta in $q_1, q_2, \dots q_N$ från $|\bar{r}| = \infty$ $(V(\infty)=0)$ till $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots, \bar{r}_N$.



Vi gör det steg för steg

1. q_1 flyttas $\Rightarrow \Delta W = 0$ ty $\bar{E} = 0$

2. q_2 flyttas $\Rightarrow \Delta W = q_2 V(\bar{r}_2) = q_2 q_1 \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 |\bar{r}_1 - \bar{r}_2|} =$

$$= \frac{1}{2}\left(q_1 V(\bar{r}_1) + q_2 V(\bar{r}_2)\right)$$

3. q_3 flyttas...

$\vdots$

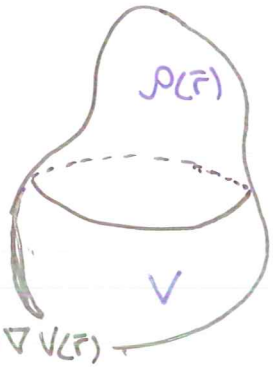
N. q_N flyttas

$$\Rightarrow \boxed{W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i \cdot V(\bar{r}_i)}$$

Detta kan vi generalisera till utbredda laddnings-fördelningar.

W för laddningstäthet ρ $\quad \Sigma \to S$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2}\int_V \rho(\bar{r}) V(\bar{r})\, dv$$



Använd att: $\begin{cases} \rho = -\varepsilon_0 \nabla \cdot \bar{E}(\bar{r}) \\ (\nabla \cdot \bar{E}(\bar{r}))V(\bar{r}) = \nabla \cdot (\bar{E}(\bar{r})V(\bar{r})) - \bar{E}(\bar{r}) \cdot \nabla V(\bar{r}) \end{cases}$

och låt $V \to 0$ och $|\bar{r}| \to \infty$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2}\int_V \rho(\bar{r}) V(\bar{r})\, dv = \frac{1}{2}\int_{V'} \rho(\bar{r}) V(\bar{r})\, dv = -\frac{\varepsilon_0}{2}\int_{V'} (\nabla \cdot \bar{E}(\bar{r}))V(\bar{r})\, dv =$$

$$= -\frac{\varepsilon_0}{2}\int_{V'} \nabla \cdot (\bar{E}(\bar{r})\bar{V}(\bar{r}))\, dv + \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{V'} \bar{E}(r) \cdot \nabla V(\bar{r})\, dv.$$

Gauss sats ger:

$V \to \mathbb{R}^3$

$$\int_{V'} \nabla\cdot\left(\bar{E}(\bar{r})V(\bar{r})\right)dv = \oint_S \bar{E}(\bar{r})V(\bar{r})\cdot\hat{n}\,ds \longrightarrow 0 \quad \text{då } |\bar{r}| \to \infty$$

$$\left(\oint ds = 4\pi r^2\right)$$

$V' \to \mathbb{R}^3$

$$\Rightarrow W = -\frac{\varepsilon_0}{2}\int_{V'} \bar{E}(\bar{r})\cdot\nabla V(\bar{r})\,dv$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{W = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{V'} |\bar{E}(\bar{r})|^2\,dv \quad \text{där } V' = \text{allt rum där } \bar{E} \neq 0}$$

VACKERT

Elektriska energitätheten:

$$w = \frac{1}{2}\varepsilon_0 |\bar{E}(\bar{r})|^2$$

Ledare

Material med rörliga laddningsbärare

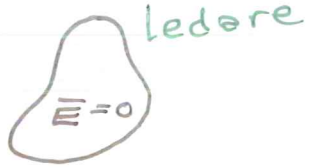
Ohms lag: $\boxed{\bar{J}(\bar{r}) = \sigma\,\bar{E}(\bar{r})}$ Från denna kan vi härleda $U = RI$

$\bar{J}(\bar{r})$ = strömtäthet $[A/m^2]$

σ = konduktivitet $\left[\frac{1}{\Omega m} = \frac{A}{Vm} = \frac{S}{m}\right]$

För en ledare i jämvikt (dvs $J = 0$) gäller:

1. $\bar{E}(\bar{r}) = 0$ inuti ledaren
2. $\rho(\bar{r}) = 0$ inuti ty $\rho(\bar{r}) = \varepsilon_0 \nabla \bar{E}(\bar{r}) = 0$
3. All nettoladdning ligger på ytan som ytladdningar med täthet $\rho_s(\bar{r})$.



$\rho_s(\bar{r})$ ges av $\rho_s(\bar{r}) = \varepsilon_0\,\hat{n}\cdot\bar{E}^+(\bar{r})$, $\bar{E}^+(\bar{r}) = E$ på utsidan.

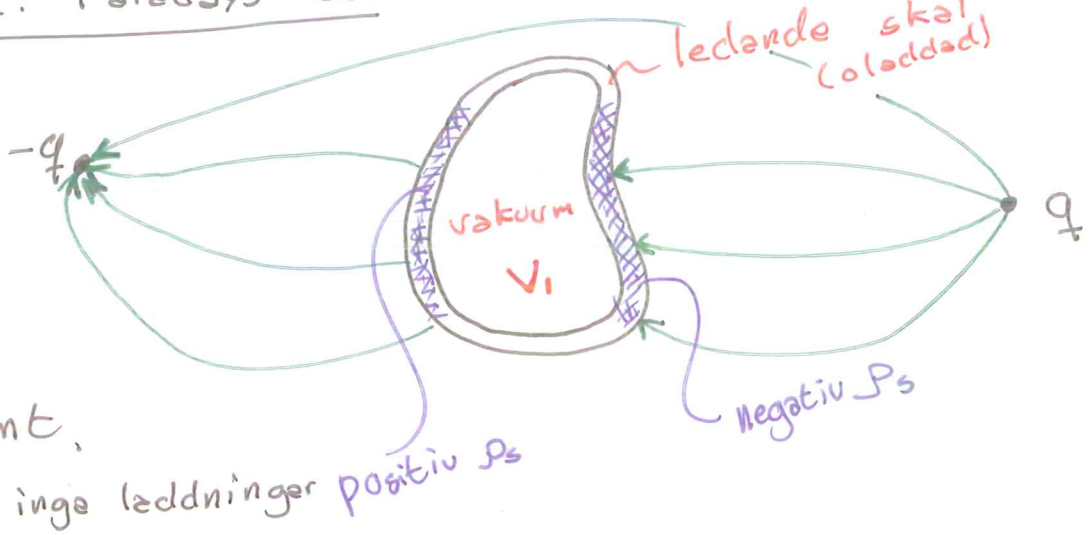
egentligen $(E^+ - \underbrace{E^-}_{=0})$

4. $V(\bar{r})$ är konstant inuti V och på ytan av V, detta beror på att:

$$\bar{E} = \bar{0} \Rightarrow \int_C \bar{E}\, d\bar{l} = V(\bar{r}_1) - V(\bar{r}_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow V(\bar{r}_1) = V(\bar{r}_2) \text{ inuti ledaren.}$$

Exempel: Faradays bur



V = konstant.

I V_1 har vi inga laddningar

$\Rightarrow$ Laplaces ekvation:

$$\begin{cases} \nabla^2 V(\bar{r}) = 0 \\ V = \text{konstant på ytan} \end{cases}$$

$\Rightarrow V(\bar{r})$ är konstant i V_1

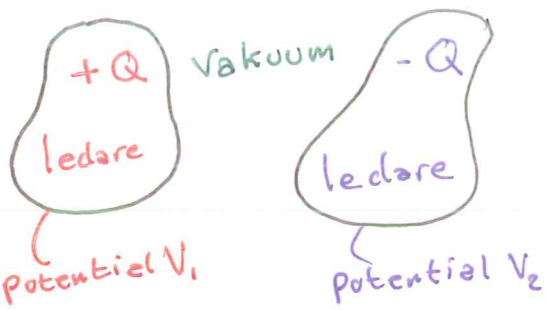
$\Rightarrow E(\bar{r}) = \bar{0}$ i V_1

Kondensatorn

Linjaritet ger att:

$$\boxed{Q = C(V_1 - V_2)}$$

där C är kapacitans.



$$W = \frac{1}{2}(QV_1 - QV_2) = \frac{1}{2}Q(V_1 - V_2) = \boxed{\frac{1}{2}C(V_1 - V_2)^2}$$