Föreläsning 16

14.4 Ensidig laplacetransformation

Sats 16.1 (s 320)

$$\mathcal{L}\left(e^{tA}\theta(t)\right)(s) = (sI - A)^{-1}$$

$\mathcal{L}(f')(s) = s\mathcal{L}(f)(s)$

Bevis $\left(e^{tA}\theta(t)\right)' = Ae^{tA}\theta(t) + e^{tA}\cdot\delta(t)$, ty $\theta' = \delta$

$= Ae^{tA}\theta(t) + I\delta(t)$

$\therefore \mathcal{L}\left(\left(e^{tA}\theta(t)\right)'\right)(s) = A\mathcal{L}\left(e^{tA}\theta(t)\right)(s) + I\cdot 1$

$s\mathcal{L}\left(e^{tA}\theta(t)\right)(s) = A\mathcal{L}\left(e^{tA}\theta(t)\right)(s) + I$

som ger

$(sI - A)\mathcal{L}\left(e^{tA}\theta(t)\right)(s) = I$ som visar satsen

Ex 16.1 (s 320)

Beräkna e^{tA} för $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Lösn $(sI - A)^{-1} = \begin{pmatrix} s-0 & 1 \\ -1 & s-0 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^2+1}\begin{pmatrix} s & -1 \\ 1 & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{s}{s^2+1} & -\frac{1}{s^2+1} \\ \frac{1}{s^2+1} & \frac{s}{s^2+1} \end{pmatrix}$

$\therefore e^{tA}\theta(t) = \mathcal{L}^{-1}\left((sI - A)^{-1}\right)(t)$

$= \begin{pmatrix} \cos t\cdot\theta(t) & -\sin t\cdot\theta(t) \\ \sin t\cdot\theta(t) & \cos t\cdot\theta(t) \end{pmatrix}$ för $-\infty < t < \infty$

Speciellt för $t > 0$ gäller

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \quad (✡)$$

Men alla element i båda leden är holomorfa funktioner av t.

$\therefore$ likheten ✡ gäller även för $-\infty < t < \infty$

$y' + y = \theta(t)$

$s\mathcal{L}(y) + \mathcal{L}(y) = \frac{1}{s}$

$\mathcal{L}(y) = \frac{1}{s(s+1)}$

$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} + \cdots\right)$

För att lösa en differentialekvation med begynnelsevillkor studerar vi ensidig laplacetransform:

$$\mathcal{L}_I(f(t))(s) \overset{\text{def}}{=} \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

<u>Obs!</u> $\mathcal{L}_I(f(t))(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} f(t)\theta(t)\,dt = \mathcal{L}_{II}(f(t)\theta(t))(s)$

t ex $\mathcal{L}_I(1)(s) = \mathcal{L}(1\cdot\theta(t))(s) = \frac{1}{s}$

<u>Ex 16.2</u> Lös $\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = 1, & t > 0 \\ y(0) = 1 \text{ och } y'(0) = -2 \end{cases}$

<u>Lösn</u> Vi vet $\mathcal{L}(f'(t))(s) = s\mathcal{L}(f(t))(s)$

Nu gäller sats 16.1 (s 315) $\mathcal{L}_I(f'(t))(s) = s\mathcal{L}_I(f(t))(s) - f(0)$

<u>Bevis</u> $\mathcal{L}_I(f'(t))(s) = \mathcal{L}(f'(t)\theta(t))(s) = \mathcal{L}\left((f(t)\theta(t))' - f(t)\delta(t)\right)(s)$

$= s\mathcal{L}(f(t)\theta(t))(s) - f(0)\underbrace{\mathcal{L}(\delta(t))(s)}_{1} = s\mathcal{L}_I(f(t))(s) - f(0)$

<u>Följdsats</u> $\mathcal{L}_I(f''(t))(s) = s^2\mathcal{L}_I(f(t))(s) - s\cdot f(0) - f'(0)$

<u>Bevis</u>

$\mathcal{L}_I(f''(t))(s) = s\mathcal{L}_I(f'(t))(s) - f'(0)$

$= s(s\mathcal{L}_I(f(t))(s) - f(0)) - \cdots$

Ensidig Laplacetransform båda leden:

$\mathcal{L}_I(y'' + 2y' + 2y) = \mathcal{L}_I(1) = \mathcal{L}(1\cdot\theta(t)) = \frac{1}{s}$

$\therefore (s^2\mathcal{L}_I(y) - sy(0) - y'(0)) + 2(s\mathcal{L}_I(y) - y(0)) + 2\mathcal{L}_I(y) = \frac{1}{s}$

$s^2\mathcal{L}_I(y) - s + 2 + 2s\mathcal{L}_I(y) - 2 + 2\mathcal{L}_I(y) = \frac{1}{s}$

$\mathcal{L}(y(t)\theta(t)) = \mathcal{L}_I(y) = \frac{s + \frac{1}{s}}{s^2+2s+2} = \frac{s^2+1}{s(s^2+2s+2)}$

Skriv $\frac{s^2+1}{s(s^2+2s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+2s+2}$

$\therefore \mathcal{L}(y(t)\theta(t)) = \frac{1}{2}\frac{1}{s} + \frac{1}{2}\frac{s-2}{(s+1)^2+1} =$

$\frac{1}{2}\frac{1}{s} + \frac{1}{2}\frac{(s+1)}{(s+1)^2+1} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{(s+1)^2+1}$

$\therefore y(t)\theta(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{s} + \frac{1}{2}\frac{s+1}{(s+1)^2+1^2} - \frac{3}{2}\frac{1}{(s+1)^2+1^2}\right)(t)$

$= \frac{1}{2}\theta(t) + \frac{1}{2}e^{-t}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1^2}\right)(t) - \frac{3}{2}e^{-t}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1^2}\right)(t)$

$= \frac{1}{2}\theta(t) + \frac{1}{2}e^{-t}\cos t\cdot\theta(t) - \frac{3}{2}e^{-t}\sin t\,\theta(t)$

Speciellt för $t \geq 0$ gäller

$$y(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-t}\cos t - \frac{3}{2}e^{-t}\sin t$$

Verifiering (ett måste)

$y(0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot 1 \cdot 1 - 0 = 1$

$y'(0) = \cdots = -2$ Ok!

Svar: (*)

Kap 6-7

För en symmetrisk matris A, t.ex. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ gäller

$$(x_1, x_2)\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (2x_1 + 3x_2,\ 3x_1 + 4x_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} =$$

$$2x_1^2 + \underbrace{3x_2x_1 + 3x_1x_2}_{6x_1x_2} + 4x_2^2 \quad \text{kvadratisk form}$$

Obs varje kvadratisk form kan uttryckas m.h.a. en symmetrisk matris.

T.ex. $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 - x_1x_2 + x_1x_3 - 4x_2x_3 + x_2^2 - x_3^2$

$$= (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

kvadratisk form

$$= \underbrace{(x_1, x_2, x_3)}_{\bar{x}^T}\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -2 \\ \frac{1}{2} & -2 & -1 \end{pmatrix}}_{K}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{\bar{x}}$$

symmetrisk

$$= \bar{x}^T K \bar{x}$$

Sats (s. 180) Följande är ekvivalenta

1. Symmetriska matrisen K är positivt definit dvs $\bar{x}^T K \bar{x} > 0$ för alla $\bar{x} \neq \bar{0}$
2. Alla egenvärden av K är positiva
3. $a_{11} > 0$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0$,