Föreläsning 14

Ex $k = 0,1,2,\ldots$

$\mathcal{L}(t^k e^{at}\theta(t))(s) \overset{(27)}{=} \mathcal{L}(t^k\theta(t))(s-a) \underset{\substack{\text{då}\\ \mathrm{Re}(s-a)>0}}{\overset{(35)}{=}} \frac{k!}{(s-a)^{k+1}}$ för $\mathrm{Re}(s-a)>0$

Omvänt gäller $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{k!}{(s-a)^{k+1}}\right)(t) = t^k e^{at}\theta(t)$

eller $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{k!}{(s-a)^{k+1}}\right)(t) \overset{(27)}{=} e^{at}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{k!}{s^{k+1}}\right)(t) \overset{(35)}{=} e^{at}t^k\theta(t)$

Ex $\mathcal{L}(\cos(bt)(\theta(t)-1))(s)$ $\boxed{\theta(t)-1 = -\theta(-t)}$

$= -\mathcal{L}(\cos(bt)\cdot\theta(-t))(s) = -\mathcal{L}(\cos(b(-t))\cdot\theta(-t))(s)$

$\overset{\text{skalning}}{=} -\frac{1}{|-1|}\mathcal{L}(\cos(bt)\,\theta(t))\left(\frac{s}{-1}\right)$

$\underset{\substack{\text{då } \mathrm{Re}(-s)\\ >0}}{\overset{(37)}{=}} -\frac{(-s)}{(-s)^2+b^2} = \frac{s}{s^2+b^2}$ för $\mathrm{Re}\, s > 0$

14.8 Invers Laplacetransform med residykalkyl för rationella funktioner $F(s) = \frac{Q(s)}{P(s)}$ med grad $P >$ grad Q

Ex 14.1 Bestäm den kausala inversa Laplacetransformen av

$$F(s) = \frac{s}{(s+1)(s+2)}$$

Lösn Metod 1 (Partialbråksuppdelning + Formelblad)

$\frac{s}{(s+1)(s+2)} = \frac{(s+2)-2(s+1)}{(s+1)(s+2)}$ välj 2 så att konstanttermen blir 0

$= -\frac{1}{s+1} + \frac{2}{s+2}$

$\therefore \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s+1)(s+2)}\right)(t) = -\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right)(t) + 2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+2}\right)(t)$

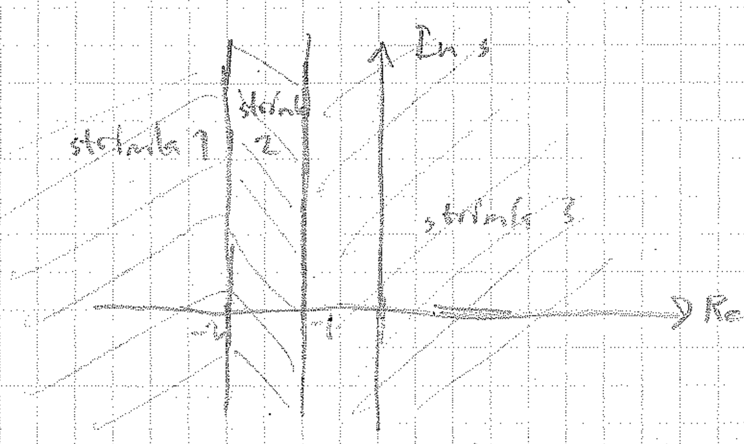
$= -e^{-t}\theta(t) + 2e^{-2t}\theta(t)$

Metod 2 Residykalkyl

$F(s)$ har två enkla poler $s_1 = -1$ och $s_2 = -2$

Residyer: $\underset{s=-1}{\mathrm{Res}}\left(\frac{e^{st}s}{(s+1)(s+2)}\right) = \frac{e^{st}s}{((s+1)(s+2))'}\Big|_{s=-1} = \frac{-e^{-t}}{-1+2}$

och $\underset{s=-2}{\text{Res}}\left(\frac{e^{st}\cdot s}{(s+1)(s+2)}\right) = \frac{e^{st}\cdot s}{((s+1)(s+2))'}\Big|_{s=-2} = \frac{-2e^{-2t}}{-2+1}$



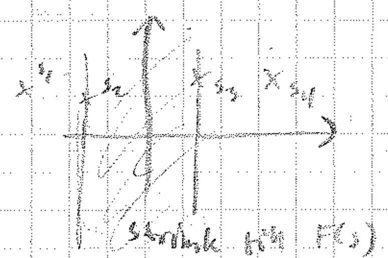
Tre möjliga strimlor. Välj strimla 3 för att få en bestämd $\mathcal{L}^{-1}(F(s))(t)$

$\therefore\ \mathcal{L}^{-1}(F(s))(t) = \theta(t)\left(\underset{s=-1}{\text{Res}}(e^{st}F(s)) + \underset{s=-2}{\text{Res}}(e^{st}F(s))\right) = \theta(t)\left(e^{-t}+2e^{-2t}\right)$

__Sats 11.1__ (s 305) Om $F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$ med grad $P <$ grad Q så gäller

$\mathcal{L}^{-1}(F(s))(t) = \theta(t)$ "summan av residyer av $e^{st}F(s)$ i alla poler till vänster om strimlan."

$+ (\theta(t)-1)$ "Summan av residyer av $e^{st}F(s)$ i alla poler till höger om strimlan."



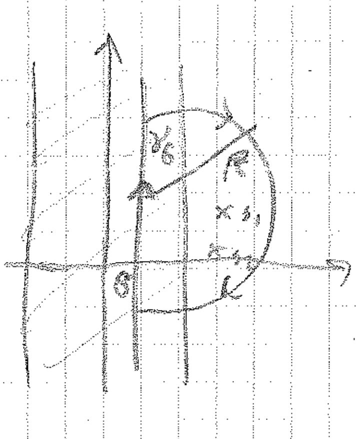
F(s) har fyra poler.

Dvs $\mathcal{L}^{-1}(F(s))(t) =$

$$= \begin{cases} \sum_{\text{Re}\, s < \sigma} \text{Res}(e^{st}F(s)) & \text{för } t > 0 \\ -\sum_{\text{Re}\, s > \sigma} \text{Res}(e^{st}F(s)) & \text{för } t < 0 \end{cases}$$

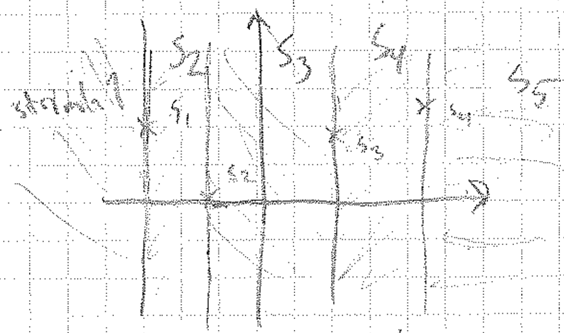
__Idé av beviset__ för $t<0$

$\mathcal{L}^{-1}(F(s))(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\sigma} e^{st}F(s)\,ds$



Jordans lemma

Följdsats F(s) har poler s_1, s_2, s_3, s_4



① Välj strimla 5 $\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}(F(s))(t)$ är kausal

② Välj strimla 1 $\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}(F(s))(t)$ är anti-kausal

③ Välj strimla 3 som innehåller den imaginära axeln

$\Longrightarrow \mathcal{L}^{-1}(F(s))(t)$ är begränsad

Ex 14.2 (s 307)

$$F(s) = \frac{s}{(s+1)(s-1)(s-2)}$$

Bestäm den ⓐ kausala / ⓑ begränsade / ⓒ antikausala inversa Laplacetransformen till F(s)

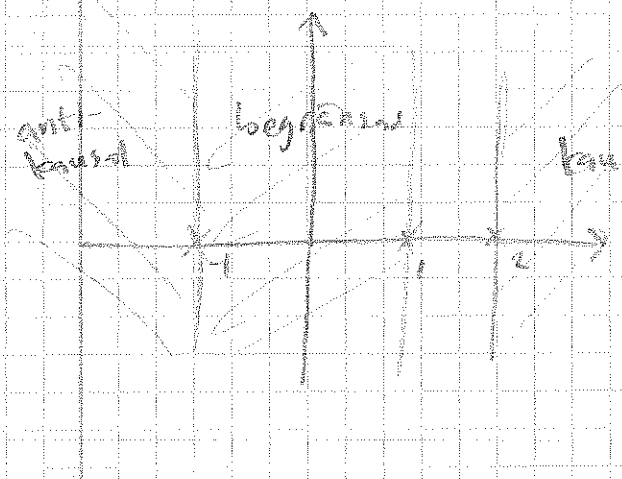
Lösn F(s) har tre enkla poler $-1, 1, 2$

Residyer

$$\operatorname{Res}_{-1}\left(e^{st}\cdot F(s)\right) = \frac{e^{st}\cdot s}{(s-1)(s-2)}\Bigg|_{s=-1} = \frac{e^{-t}(-1)}{6}$$

$$\operatorname{Res}_{1}\left(e^{st}\cdot F(s)\right) = \frac{e^{st}s}{(s+1)(s-2)}\Bigg|_{s=1} = \frac{e^{t}}{-2}$$

$$\operatorname{Res}_{2}\left(e^{st}\cdot F(s)\right) = \frac{e^{st}s}{(s+1)(s-1)}\Bigg|_{s=2} = \frac{2e^{2t}}{3}$$



$$\operatorname{Res}_{s=1} \frac{e^{st}}{(s-1)^2 s} = \operatorname{Res}_{s=1} \frac{\frac{e^{st}}{s}}{(s-1)^2}$$

$$= \left(\frac{e^{st}}{s}\right)'\Bigg|_{s=1}$$

ⓐ $\mathcal{L}^{-1}(F(s))(t) = \theta(t)\left(\frac{-e^{-t}}{6} + \frac{e^{t}}{-2} + \frac{2}{3}e^{2t}\right)$

kausal

ⓑ $\mathcal{L}^{-1}(F(s))(t) = \theta(t)\,\frac{e^{-t}(-1)}{6} + (\theta(t)-1)\left(\frac{e^{t}}{-2} + \frac{2}{3}e^{2t}\right)$

begr.

ⓒ $\mathcal{L}^{-1}(F(s))(t) = (\theta(t)-1)\left(\frac{e^{-t}(-1)}{6} + \frac{e^{t}}{-2} + \frac{2}{3}e^{2t}\right)$

anti kausal

<u>Ex 14.3</u> Bestäm en begränsad lösning till

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = \delta'(t) \quad \text{för} \quad -\infty < t < \infty$$

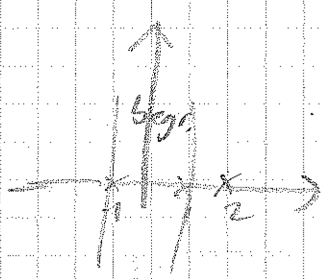
<u>Lösn</u> $\mathcal{L}(y''' - 2y'' - y' + 2y)(s) = \mathcal{L}(\delta')(s)$

$$s^3\mathcal{L}(y)(s) - 2s^2\mathcal{L}(y)(s) - s\mathcal{L}(y)(s) + 2\mathcal{L}(y)(s) = s$$

$$\mathcal{L}(y)(s) = \frac{s}{s^3 - 2s^2 - s + 2} = \frac{s}{s^2(s-2) - (s-2)} =$$

$$= \frac{s}{(s^2-1)(s-2)} = \frac{s}{(s-1)(s+1)(s-2)}$$

Tre poler $-1,\ 1,\ 2$



$\therefore\ y(t) = \mathcal{L}^{-1}\Big(\underbrace{\frac{s}{(s-1)(s+1)(s-2)}}_{F(s)}\Big)(t) = \theta(t)\operatorname{Res}_{-1}\left(e^{st}F(s)\right) + (\theta(t)-1)\operatorname{Res}_{1}\left(e^{st}F(s)\right)$

$+ \operatorname{Res}_{2}\left(e^{st}F(s)\right)\Big) \underset{\text{Ex 14.2}}{=} \theta(t)\left(-\frac{1}{6}e^{-t}\right) + (\theta(t)-1)\left(\frac{-e^{t}}{2} + \frac{2}{3}e^{2t}\right)$