Föreläsning 12

$f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega)$, där

$$F(\omega) = \mathcal{F}(f(t))(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t)\,dt$$

och $f(t) = \mathcal{F}^{-1}(F(\omega))(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} F(\omega)\,d\omega$

Sats

$$\frac{1}{2\pi}F(-\omega) \underset{\mathcal{F}^{-1}}{\overset{\mathcal{F}}{\rightleftarrows}} f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega) \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi f(-t) \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi F(-\omega)$$

Ex 12.1 (s 1147 och s 1145 i övningsbok)

Bestäm $\mathcal{F}(f)$ och $\mathcal{F}^{-1}(f)$ för $f(t) = \frac{e^{it}}{2+5t^2}$

Lösn.

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \widehat{\frac{e^{it}}{2+5t^2}}(\omega) \overset{(10)}{=} \widehat{\frac{1}{2+5t^2}}(\omega-1) = \frac{1}{2}\widehat{\frac{1}{1+\frac{5}{2}t^2}}(\omega-1) =$$

$$\overset{(8)}{=} \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{5}{2}}}\widehat{\frac{1}{1+t^2}}\left(\frac{\omega-1}{\sqrt{\frac{5}{2}}}\right) \overset{(18)}{=} \frac{1}{\sqrt{10}}\pi e^{-\left|\frac{\omega-1}{\sqrt{5/2}}\right|}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{10}}\pi e^{-\sqrt{\frac{2}{5}}|\omega+1|} \underset{\mathcal{F}^{-1}}{\overset{\mathcal{F}}{\rightleftarrows}} \frac{e^{it}}{2+5t^2} \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{\sqrt{10}}\pi e^{-\sqrt{\frac{2}{5}}|\omega-1|}$$

dvs $\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{e^{it}}{2+5t^2}\right)(\omega) = \frac{1}{2\sqrt{10}} e^{-\sqrt{\frac{2}{5}}|\omega+1|}$

Alt $\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{e^{it}}{2+5t^2}\right)(\omega) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\left(\frac{e^{it}}{2+5t^2}\right)(-\omega)$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{10}}\pi e^{-\left|\frac{-\omega-1}{\sqrt{5/2}}\right|}$$

12.2 Fouriertransformation av distributioner

Vi vet

$$\langle T', \varphi \rangle = \langle T, -\varphi' \rangle$$

(φ: testfunktion)

och ($f(t) \in C^\infty$)

$$\langle f(t)T, \varphi \rangle = \langle T, \underbrace{f(t)\varphi}_{\text{ny testfunktion}} \rangle$$

Nu ska vi definiera $\langle \widehat{T}, \varphi \rangle \overset{\text{def}}{=} \langle T, \widehat{\varphi} \rangle$

Motivering För $f(t) \in L_1$ och $\varphi \in D$ gäller $\langle \widehat{f(t)}, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\varphi(\omega)\,d\omega$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t)\,dt\right)\varphi(\omega)\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t)\varphi(\omega)\,d\omega\right)dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\hat{\varphi}(t)\,dt = \langle f(t), \hat{\varphi} \rangle$$

behöver inte bli ett komplext tal

Problem $\varphi \in D \not\Rightarrow \hat{\varphi} \in D$

Schwartz-klassen: Vi utvidgar D till en större mängd $\mathcal{S} = \{\varphi(t) \in C^{\infty}(\mathbb{R}) : |t^k \varphi^{(n)}(t)| \le C_{k,n}\}$ för alla tal $t \in \mathbb{R}$ och alla heltal $k \ge 0$ och $n \ge 0$

t.ex. $e^{-t^2} \in \mathcal{S}$, $e^{-t^2} \notin D$

Obs $D \subset \mathcal{S}$ en delmängd av

Def 12.1 En temperad distribution T är en linjär, kontinuerlig avbildning som avbildar $\varphi \in \mathcal{S}$ på ett komplext tal $\langle T, \varphi \rangle$

Def 12.2 Fouriertransformationen av en temperad distribution T är definierad genom $\langle \hat{T}, \varphi \rangle \overset{\text{def}}{=} \langle T, \hat{\varphi} \rangle$ för alla $\varphi \in \mathcal{S}$

Ex 12.2 $\langle \hat{\delta}, \varphi \rangle = \langle \delta, \hat{\varphi} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\hat{\varphi}(t)\,dt =$

$\hat{\varphi}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i0t}\varphi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} 1\cdot\varphi(t)\,dt = \langle 1, \varphi \rangle$

dvs $\langle \hat{\delta}, \varphi \rangle = \langle 1, \varphi \rangle$ för $\varphi \in \mathcal{S}$

som ger $\hat{\delta}(\omega) = 1$

Räkneregler gäller även för distributioner

Ex 12.3 $\delta(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} 1 \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\,\delta(-t) = 2\pi\,\delta(t)$

$\delta(t) = \delta(-t)$

$\therefore\; 1 \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\,\delta(t)$

Ex 12.4 (a) $\hat{t}(w) = \widehat{t\cdot 1}(w) = i\dfrac{d}{dw}\hat{1}(w) = i\dfrac{d}{dw}\left(2\pi\,\delta(t)\right) = 2\pi i\,\delta'(t)$

(b) $\widehat{t^2}(w) = i^2\dfrac{d^2}{dw^2}\hat{1}(w) = -1\cdot 2\pi\,\delta''$

Ex 12.5 (a) $\widehat{\delta'(t)}(w) = iw\,\widehat{\delta(t)}(w) = iw\cdot 1$

(b) $\widehat{\delta''} = (iw)^2\,\hat{\delta} = (iw)^2$

$\widehat{\delta^{(k)}} = (iw)^k$ för $k = 0, 1, 2, \ldots$

Ex 12.6 (s 278)

$\widehat{\cos(at)}(w) = \widehat{\dfrac{e^{iat} + e^{-iat}}{2}}(w) = \dfrac{1}{2}\widehat{e^{iat}}(w) + \dfrac{1}{2}\widehat{e^{-iat}}(w) =$

$\dfrac{1}{2}\hat{1}(w-a) + \dfrac{1}{2}\hat{1}(w+a) = \dfrac{1}{2}2\pi\,\delta(w-a) + \dfrac{1}{2}2\pi\,\delta(w+a)$

Ex 12.7 Bestäm inversa Fouriertransformen av $2w^2 + 3\delta''(w)$

Lösn $\widehat{2t^2 + 3\delta''(t)}(w) = 2\,\widehat{t^2}(w) + 3\,\widehat{\delta''}(w)$

$\underset{\text{Ex 12.5}}{\overset{\text{Ex 12.4}}{=}} -4\pi\,\delta''(w) + 3(iw)^2 = -4\pi\,\delta''(w) - 3w^2$

$\therefore\; \mathcal{F}^{-1}\left(2t^2 + 3\delta''(t)\right)(w) = \dfrac{1}{2\pi}\mathcal{F}\left(2t^2 + 3\delta''(t)\right)(-w)$

$= \dfrac{1}{2\pi}\Big(-4\pi\,\underset{\delta''(w)}{\underset{\parallel}{\delta''(-w)}} - 3\underbrace{(-w)^2}_{w^2}\Big)$

Ex 12.12 kausalt LTI systemet $w(t) \xrightarrow{S} y(t)$ är definierad

genom $y' + y = w(t)$

Bestäm impulssvaret $h(t) = S(\delta(\tau))(t)$ av systemet

dvs Hitta en kausal lösning till $y' + y = \delta(t)$

Lösn

$\widehat{y' + y} = \hat{\delta}$ $\quad \hat{y'} + \hat{y} = 1 \quad i\omega\hat{y} + \hat{y} = 1$

$\hat{y} = \frac{1}{1+i\omega}$

(1b) ger $y(t) = e^{-t}\,\theta(t)$ som är kausal

dvs $h(t) = e^{-t}\,\theta(t)$

13.13

$w(t) \xrightarrow{S} y(t)$ är LTI

$\Leftrightarrow y(t) = h * w(t)$ som ger $\hat{y} = \widehat{h * w} = \hat{h} \cdot \hat{w}$

som medför att $y(t) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{h}\hat{w})(t)$