11/10 2012

Tidsharmoniska fält (kap 9.1.2)
(monokromatiska fält)

(12) Ett viktigt exempel på tidsberoende fält är fält med komponenter som varierar harmoniskt. $\cos(\omega t+\delta)$ i tiden.

ω = vinkelfrekvens $= 2\pi f$ f frekvens

δ = fasfaktor

Det visar sig praktiskt att räkna med komplexa storheter och sedan ta realdelen för att få de fysikaliska storheterna.

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\{\underbrace{\vec{E}(\vec{r})}_{\text{komplex vektor}} e^{-i\omega t}\}$$

Reellt fält		Komplext fält
$\hat{x}E_0\cos(\omega t)$	$\Longleftrightarrow$	$\hat{x}E_0 e^{-i\omega t}$
$\hat{x}E_0\sin(\omega t)$		$\hat{x}iE_0 e^{-i\omega t}$
$\hat{x}E_0\cos(\omega t+\delta)$		$\hat{x}E_0 e^{i\delta} e^{-i\omega t}$

Plana vågor

Vågekv (källfritt område)

$$\nabla^2 \vec{E}(\vec{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{0}$$

Tidsharmoniska fält $\frac{\partial}{\partial t} \to -i\omega$ | $e^{-i\omega t}$ (finns underförstått)

$$\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}) + \underbrace{\varepsilon\mu\omega^2}_{k^2}\vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}$$

Re(— " —)
Dessa tar vi med i slutet.

Inför materialets vågtal $k = \sqrt{\varepsilon\mu}\,\omega = \frac{\omega}{c}$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}) + k^2 \vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}} \quad *$$

Materialets brytningsindex: $n = \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}} = \sqrt{\varepsilon_r\mu_r}$

$k = \frac{\omega}{c_0} n = k_0 n$, $k_0 = \frac{\omega}{c_0}$

En viktig klass av lösningar till Maxwells ekvationer är de plana vågorna

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0 \cdot e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}$$

$\vec{E}_0$ är en fix komplex vektor.

$\vec{k}$ är vågvektorn.

Villkor på $\vec{k}$

Sätt in i *:

Insättningen ger $\nabla \to i\vec{k}$:

$\underbrace{(-\vec{k}\cdot\vec{k}+k^2)}_{=0}\vec{E}_0 e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = \vec{0}$ vilket ger följande villkor på $\vec{k}$:

$$\boxed{\vec{k}\cdot\vec{k} = k^2 \Rightarrow \vec{k} = k\hat{e}}$$

Gauss lag $\nabla\cdot\vec{D} = \vec{0} \xRightarrow{\text{hom. mat.}} \nabla\cdot\vec{E} = 0$ ger:

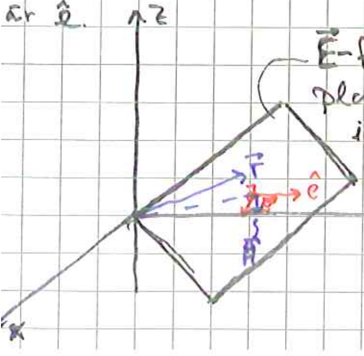
$\underbrace{i\vec{k}\cdot\vec{E}_0}_{=0} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = 0$ vilket ger

$\boxed{\vec{k}\cdot\vec{E}_0 = 0}$ | Vågorna är transversella $\vec{E}_0 \perp \vec{k}$

Lösningarna

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\{\vec{E}_0 e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} e^{-i\omega t}\} = \mathrm{Re}\{\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\}$$

kallas plana vågor eftersom för fix tid t har alla punkter $\vec{k}\cdot\vec{r}$ = konstant (ett plan) samma $\vec{E}(\vec{r},t)$-fält och normalen till planet är $\hat{e}$.



$\vec{E}$-fältet svänger i detta plan. Vågen utbreder sig i $\hat{e}$:s riktning.

Plan med inbördes avstånd λ där $k\lambda = 2\pi$ har samma fältstyrka.

$$\vec{E}(\vec{r}+\hat{e}\lambda,t) = \mathrm{Re}\{\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot(\vec{r}+\hat{e}\lambda)-\omega t)}\} = \mathrm{Re}\{\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} e^{\overbrace{i\vec{k}\cdot\hat{e}\lambda}^{2\pi}}\} = \vec{E}(\vec{r},t)$$

Avståndet λ kallas våglängd λ.

Frekvens $f = \frac{\omega}{2\pi}$, $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow f\lambda = \frac{\omega}{k} = c$.

Motsvarande $\vec{H}$-fält fås genom Faradays lag

$$\nabla\times\vec{E} = i\omega\mu\vec{H} \quad \left(-\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\right) \Rightarrow \vec{H} = \frac{1}{i\omega\mu}\nabla\times\vec{E} = \frac{1}{i\omega\mu}i\vec{k}\times\vec{E} = \boxed{\frac{1}{\omega\mu}\vec{k}\times\vec{E}}$$

$\{\vec{E}, \vec{H}, \vec{k}\}$ Högersystem

Tidsmedelvärden av en produkt är

$$\boxed{\langle f(t)g(t)\rangle_{\text{medel}} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{f(\omega)g^*(\omega)\}}$$

(Bevis: se problem 9.11 S382, övn. 9.21)

Poyntings vektor

$$\langle\vec{S}\rangle_{\text{medel}} = \langle\vec{E}(t)\times\vec{H}(t)\rangle_{\text{medel}} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{\vec{E}(\vec{r})\times\vec{H}^*(\vec{r})\}$$

$$\langle\vec{S}\rangle_{\text{medel}} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{\vec{E}\times(\frac{\vec{k}}{\omega\mu}\times\vec{E}^*)\} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{\frac{\vec{k}}{\omega\mu}(\vec{E}\cdot\vec{E}^*) - \vec{E}^*\underbrace{(\vec{E}\cdot\frac{\vec{k}}{\omega\mu})}_{=0}\} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\vec{k}}{\mu\omega}|\vec{E}|^2 = \frac{1}{2\eta}\hat{e}|\vec{E}|^2.$$

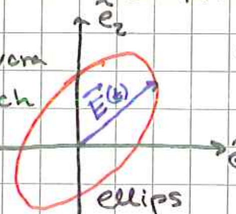
$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$ = materialets vågimpedans. $[\Omega]$

$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 377\,\Omega$.

Polarisation (kap 9.1.4) (fältets riktning)

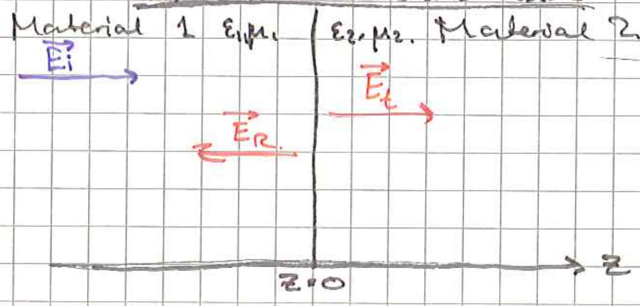
Ett tidsharmoniskt fält, tex $\vec{E}$, har följande egenskaper

1) $\vec{E}$-fältet svänger i ett plan (polarisationsplanet)
2) $\vec{E}$-fältet beskriver en elliptisk bana i polaplanet.
3) Rörelsen kan vara moturs (medurs) och kallas höger resp. vänsterpolariserat.



Två viktiga fall:
1) Linjärt polariserat
2) Cirkulärt polariserat

Reflektion och transmission



Möjliga lösningar, vågutbredning: $\vec{k} \parallel \hat{z}$

$\vec{E}_0 e^{\pm ik_1 z}$, $\vec{E}_0' e^{\pm ik_2 z}$ $k_i = \omega\sqrt{\mu_i\varepsilon_i}$ $i = 1,2$.

Allmän lösning i material 1:

$\vec{E}_1(z) = \vec{E}_i e^{ik_1 z} + \vec{E}_R e^{-ik_1 z}$

material 2:

$\vec{E}_2(z) = \vec{E}_t e^{ik_2 z}$. Följande schema används:

(1) Plocka fram motsvarande magnetiska fältstyrkor $\vec{H}_1(z)$ och $\vec{H}_2(z)$.

(2) Matcha randvillkoren på ytan $z=0$. Dessa bestämmer $\vec{E}_t, \vec{E}_R$.

Svaret blir $\begin{cases}\vec{E}_R = r\vec{E}_i \\ \vec{E}_t = t\vec{E}_i\end{cases}$ $r = \frac{\eta_2-\eta_1}{\eta_2+\eta_1}$, $t = \frac{2\eta_2}{\eta_2+\eta_1}$, $\eta_i = \sqrt{\frac{\mu_i}{\varepsilon_i}}$, $i = 1,2$.