8/10-2012

(11).

Ex) Induktion ("hoppande skiva")

Spänning 350 V $m = 84\,g$

Kapacitans $2\times 1{,}5\,mF = 3\,mF$

Upplagrad energi $W = \frac{1}{2}CV^2 = 184\,J$

Om allt omsätts i rörelseenergi hos skivan, hoppar skivan till höjden h

$mgh = W \Rightarrow h = \frac{W}{mg} = 224\,m$. :)

Maxwells ekvationer och vågekvationer

$$\begin{cases}\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\ \nabla\times\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\end{cases}\qquad \begin{cases}\nabla\cdot\vec{D} = \rho\\ \nabla\cdot\vec{B} = 0\end{cases}$$

Antag linjärt isotropt, homogent material $\begin{cases}\vec{D} = \varepsilon\vec{E}\\ \vec{B} = \mu\vec{H}\end{cases}$

$$\underbrace{\nabla\times(\nabla\times\vec{E})}_{\nabla(\nabla\cdot\vec{E}) - \nabla^2\vec{E}} = -\nabla\times\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\mu\vec{H} =$$

$$= -\mu\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{J} + \varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) = \nabla^2\vec{E} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \nabla(\underbrace{\nabla\cdot\vec{E}}_{\rho/\varepsilon}) + \mu\frac{\partial\vec{J}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla^2\vec{E} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \frac{\nabla\rho}{\varepsilon} + \mu\frac{\partial\vec{J}}{\partial t}}$$

Analogt:

$$\boxed{\nabla^2\vec{H} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} = -\nabla\times\vec{J}}$$

Varje kartesisk komponent av $\vec{E}$ och $\vec{H}$ fältet satisfierar vågekvationen.

$$\nabla^2 f(\vec{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f(\vec{r},t)}{\partial t^2} = \text{källor}.$$

Vågorna utbreder sig med hastigheten $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$. I vakuum $c_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \approx 3\cdot 10^8\,m/s$

Poyntings sats (effektkonservering) (8.1.2)

Vid härledning av magnetisk energi försummades en term som är försumbar vid långsamt varierande fält. ("Långsamt = några kHz"). Använd identiteten

$\nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{H}) = (\nabla\times\vec{E})\cdot\vec{H} - \vec{E}\cdot(\nabla\times\vec{H})$. Sätt in Faradays lag och Ampères lag.

$\nabla(\vec{E}\times\vec{H}) = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot\vec{H} - \vec{E}\cdot\left(\vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)$ Antag linjärt, isotropt $\begin{cases}\vec{D} = \varepsilon\vec{E} \text{ och}\\ \vec{B} = \mu\vec{H}\end{cases}$

$$\nabla(\vec{E}\times\vec{H}) = -\mu\underbrace{\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\cdot\vec{H}}_{\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{H}\cdot\vec{H})} - \varepsilon\underbrace{\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}}_{\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E}\cdot\vec{E})} - \vec{E}\cdot\vec{J} =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{B}\cdot\vec{H} + \vec{E}\cdot\vec{D}) - \vec{E}\cdot\vec{J}$$

Integrera över en godtycklig volym V med rand S

$$\underbrace{\iiint_V \nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{H})\,dV}_{③} + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V(\vec{B}\cdot\vec{H} + \vec{E}\cdot\vec{D})\,dV}_{②} + \underbrace{\iiint_V \vec{E}\cdot\vec{J}\,dV}_{①} = 0$$

Detta är effektbalans (Poyntings sats).

① $\iiint \vec{E}\cdot\vec{J}\,dV$ = effektutveckling P som det elektriska fältet utför på laddningsbärarna (kap 7.1.1)

② $\frac{\partial}{\partial t}\iiint\left(\frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H} + \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}\right)dV$ = tidsderivatan av den energi som är upplagrad i det elektriska och magnetiska fältet (4.4.3 + 7.2.4)

③ Ny term relaterad till strålning. Divergenssatsen ger $\iiint_V \nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{H})\,dV = \oiint_S(\vec{E}\times\vec{H})\cdot\hat{n}\,dS$ = effekten som försvinner ut ur S. Effekten bärs av fälten $\vec{E}$ och $\vec{H}$ som växelverkar.

Def: Poyntings vektor $\boxed{\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H}}$ är effektflödet (effekt/ytenhet) som det elektromagnetiska fältet för med sig.

Lösning av vågekvationen

Vi skall studera lösningar $V = V(\vec{r},t)$ till vågekvationen

$$\nabla^2 V(\vec{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}V(\vec{r},t) = -\rho(\vec{r},t) \quad \text{(källterm)}$$

Låt källtermen vara först en punktkälla i origo.

$\rho(\vec{r},t) = \delta(\vec{r})q(t)$ (en matematisk konstruktion).

Vi söker sfäriskt symmetrisk lösning $V = V(r,t)$

(Vågekv. i sfäriska koordinater: $\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) = \nabla^2 V$.

$$\Rightarrow \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\delta(\vec{r})q(t) \quad (*)$$

En lösning till den källfria ekvationen är $V(\vec{r},t) = \frac{f(r-ct)}{r}$, $r > 0$, där f är en godtycklig (snäll) funktion.

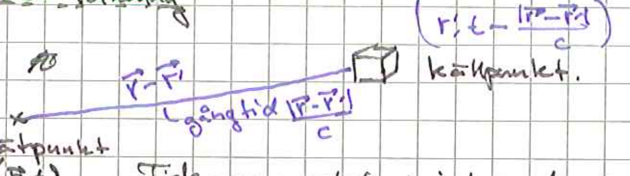
f bestäms av $q(t)$ i origo. Resultatet är $f(\xi) = \frac{q(-\xi/c)}{4\pi}$. Lösningen till vågekvationen

$$V(\vec{r},t) = \frac{f(r-ct)}{r} = \frac{q(t - r/c)}{4\pi r}$$

Translation av källan $r \to |\vec{r} - \vec{r}'|$. Totalt från hela källfördelningen $\rho(\vec{r},t)$

$$V(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi}\iiint_V \frac{\rho\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,dV'$$

Fysikalisk tolkning

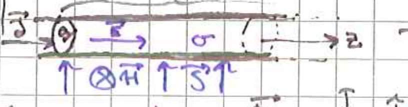


Tidsargumentet i integralen är tidsförskjutet med gångtiden mellan käll- och mätpunkt.

Jämför med statik

$\nabla^2 V = -\rho/\varepsilon_0$ $V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,dV'$ Motsvarar oändlig utbredningshastighet.

Ex) Ledningstråd



Antag likformig strömtäthet $\vec{J} = \frac{I}{\pi a^2}\hat{z}$ $\vec{E} = \frac{\vec{J}}{\sigma} = \frac{I\hat{z}}{\pi a^2\sigma}$

Amperes lag $\vec{H} = \frac{I}{2\pi r_c}\hat{\phi}$ (på ledarens yta).

Poyntings vektor

$$\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H} = \frac{I}{\pi a^2\sigma}\frac{I}{2\pi a}\underbrace{\hat{z}\times\hat{\phi}}_{-\hat{r}_c} = -\frac{I^2}{2\pi^2 a^3\sigma}\hat{r}_c$$