Föreläsning 10

12.3 S är LTI $\Rightarrow e^{st} \xrightarrow{S} H(s)e^{st}$

∴ överföringsfunktionen $H(s)$ av S är

$$H(s) \overset{def}{=} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} h(t)\,dt \overset{obs}{=} \frac{S(e^{st})}{e^{st}}$$

Def 10.1 (s. 234–235) reellt ω

① $H(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} h(t)\,dt$ kallas frekvensfunktionen av stabil LTI systemet S.

② Skriv

$$H(i\omega) = A(\omega)e^{i\varphi(\omega)}$$

där $A(\omega) \overset{def}{=} |H(i\omega)|$ kallas amplitudfunktionen av S och

$\varphi(\omega) \overset{def}{=} \arg(H(i\omega))$ kallas fasfunktionen av S.

Ex 10.1 Antag att S är definierad av

$-y'' + y' = 2w' + 3w$

∴ ① Överföringsfunktionen

$$H(s) = \frac{2s^1 + 3s^0}{-1\cdot s^2 + s}$$

så är $S(e^{2t}) =$

$$H(2)e^{2t} = \frac{2\cdot 2 + 3}{-2^2+2}e^{2t} = \frac{7}{-2}e^{2t}$$

∴ $y(t) = -\frac{7}{2}e^{2t}$ är en partikulärlösning till diff. ekv. då $w = e^{2t}$

$z = x + iy = re^{i\theta}$

$r = \sqrt{x^2+y^2}$

$\theta = \arg(z)$

$w(t) \xrightarrow{S} y(t)$

② Frekvensfunktionen är $H(i\omega) = \frac{2\omega i + 3}{-(i\omega)^2 + i\omega} = \frac{3+2\omega i}{\omega^2+\omega i}$

som ger $A(\omega) = |H(i\omega)| = \left|\frac{3+2\omega i}{\omega^2+\omega i}\right| = \frac{\sqrt{3^2+(2\omega)^2}}{\sqrt{\omega^2+\omega^2}}$

och $\varphi(\omega) = \arg(H(i\omega)) = \arg\left(\frac{3+2\omega i}{\omega^2+\omega i}\right) = \arctan\frac{2\omega}{3} - \arctan\frac{\omega}{\omega^2}$

ty $3>0$, $\omega^2>0$

$\arg\frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$

$\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$

Kap 13 Fouriertransformation

$$x \xrightarrow{f(x)=\ln x} \ln x \quad \Big\} \ln x + \ln y \xrightarrow{f^{-1}} xy$$
$$y \xrightarrow{f(y)} \ln y$$

$$xy = e^{\ln(xy)} = e^{\ln x + \ln y}$$

13.1 - 13.4 Vi inför $L_1 = \{f(t) ; \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt$ och $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt$ är konvergenta ändligt$\}$

Def 10.2 (s 253)

Fouriertransformen av $f(t) \in L_1$ är definierad genom

$$\hat{f}(\underset{\text{reellt tal}}{w}) \;\text{eller}\; \mathcal{F}(f(t))(w) \overset{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwt} f(t)\,dt \quad \text{för } w \in \mathbb{R}$$

Man kan visa att $f(t) \in L_1 \Rightarrow \hat{f}(w)$ är begränsad, kontinuerlig och uppfyller $\lim_{w \to \pm\infty} \hat{f}(w) = 0$

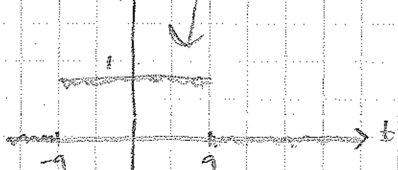
Ex 10.2 Frekvensfunktionen är $H(iw) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwt} h(t)\,dt \overset{\text{dvs}}{=} \mathcal{F}(h(t))(w)$

Sats 10.3 (s 254 - 259)

1. $\widehat{\theta(t+a) - \theta(t-a)}\,(w) = 2\dfrac{\sin(aw)}{w}$
2. $\widehat{e^{-t}\theta(t)}\,(w) = \dfrac{1}{1+iw}$
3. $\widehat{\dfrac{1}{1+t^2}}\,(w) = \pi e^{-|w|}$
4. $\widehat{e^{-\frac{t^2}{}}}\,(w) = \sqrt{\pi}\, e^{-\frac{w^2}{4}}$
5. $\widehat{e^{-|t|}}\,(w) = \dfrac{2}{1+w^2}$

Bevis

1. $\theta(t+a) - \theta(t-a) = \theta_{-a}(t) - \theta_a(t)$



$\therefore \widehat{\theta(t+a) - \theta(t-a)}\,(w) =$

$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwt}\,(\theta_{-a}(t) - \theta_a(t))\,dt =$

$$\int_{-a}^{a} e^{-iwt} \cdot 1\,dt = \left[\frac{e^{-iwt}}{-iw}\right]_{-a}^{a} = -\frac{1}{iw}\left(e^{-iwa} - e^{iwa}\right) = -\frac{1}{iw}\left(-2\sin(wa)\,i\right) = \frac{2\sin(aw)}{w}$$

② $\widehat{e^{-t}\theta(t)}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwt} e^{-t}\theta(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-iwt} e^{-t}\cdot 1\,dt =$

$$\int_0^\infty e^{(-iw-1)t}\,dt = \left[\frac{e^{(-iw-1)t}}{-iw-1}\right]_{t=0}^{\infty} = 0 - \frac{1}{-iw-1} = \frac{1}{1+iw}$$

Sats 10.4 Räknelagar (s.256-258)

① $\widehat{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)} = c_1\hat{f}_1 + c_2\hat{f}_2$ för alla tal c_1 och c_2

② (skalning) $\widehat{f(at)}(w) = \frac{1}{|a|}\widehat{f(t)}\left(\frac{w}{a}\right)$ för talet a.

③ (förskjutning) $\widehat{f(t-a)}(w) = e^{-iwa}\,\widehat{f(t)}(w)$

④ $\widehat{e^{iat}f(t)}(w) = \widehat{f(t)}(w-a)$

⑤ $\widehat{f'(t)}(w) = iw\,\widehat{f(t)}(w)$

⑥ $\widehat{t\,f(t)}(w) = i\frac{d}{dw}\left(\widehat{f(t)}(w)\right)$

Bevis av ③ $\widehat{f(t-a)}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwt} f(t-a)\,dt \overset{t_1 = t-a,\ dt_1 = dt}{=} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iw(t_1+a)} f(t_1)\,dt_1$

$$= e^{-iwa}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwt_1} f(t_1)\,dt_1 = e^{-iwa}\,\widehat{f(t)}(w)$$

Ex 10.3 $\widehat{e^{-\frac{t^2}{2}}}(w) = \widehat{e^{-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}t\right)^2}}(w) \overset{\text{enl. ②}}{=} \frac{1}{\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|}\,\widehat{e^{-t^2}}\left(\frac{w}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\right)$

$$= \sqrt{2}\sqrt{\pi}\,e^{-(\sqrt{2}w)^2/4} = \sqrt{2\pi}\,e^{-\frac{1}{2}w^2}$$

Ex 10.4 $\widehat{te^{-\frac{t^2}{2}}}(w) \overset{\text{enl. ⑥}}{=} i\frac{d}{dw}\left(\widehat{e^{-\frac{t^2}{2}}}(w)\right) \overset{\text{Ex 10.3}}{=}$

$$i\frac{d}{dw}\left(\sqrt{2\pi}\,e^{-\frac{1}{2}w^2}\right) = i\sqrt{2\pi}\,e^{-\frac{1}{2}w^2}\left(-\frac{1}{2}\cdot 2w\right)$$

Ex 10.5 $\widehat{e^{-2(t-7)^2}}(w) \overset{\text{enl. ③}}{=} e^{-iw7}\,\widehat{e^{-2t^2}}(w) =$

$$e^{-iw7}\,\widehat{e^{-(\sqrt{2}t)^2}}(w) = e^{-iw7}\frac{1}{\sqrt{2}}\,\widehat{e^{-t^2}}\left(\frac{w}{\sqrt{2}}\right) =$$

$$e^{-iw7}\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\pi}\,e^{-\left(\frac{w}{\sqrt{2}}\right)^2\cdot\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,e^{-iw7}\cdot e^{-\frac{w^2}{8}}$$

A-H $\quad e^{-2(t-7)^2} \overset{③}{\Rightarrow} e^{-2t^2} \overset{②}{\Rightarrow} e^{-t^2}$

Så är $\quad e^{-t^2} \xrightarrow{\mathcal{F}} \sqrt{\pi}\, e^{-\frac{w^2}{4}}$

$$e^{-(\sqrt{2}t)^2} \xrightarrow[\text{enl. (2)}]{\mathcal{F}} \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\pi}\, e^{-\frac{\left(\frac{w}{\sqrt{2}}\right)^2}{4}}$$

Ans $\quad e^{-2t^2} \xrightarrow{\mathcal{F}} \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-\frac{w^2}{8}}$

$$e^{-2(t-7)^2} \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-iw7}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-\frac{w^2}{8}}$$

Ex 10.6 $\quad \widehat{t e^{-2t}\theta(t)}(w) = i\frac{d}{dw}\widehat{e^{-2t}\theta(t)}_w$

$\theta(t) = \theta(2t)$

$$= i\frac{d}{dw}\widehat{e^{-2t}\theta(2t)}(w) = i\frac{d}{dw}\frac{1}{2}\widehat{e^{-t}\theta(t)}\left(\frac{w}{2}\right)$$

$$= \frac{i}{2}\frac{d}{dw}\left(\frac{1}{1+i\frac{w}{2}}\right) = i\,\frac{-i}{(2+iw)^2} = \frac{1}{(2+wi)^2}$$

$a>0$

$\theta(t) = \theta(at)$