15/1 2012 (10)

Rep linalg.

A symmetrisk 3×3-matris med egenvärden λ_k och egenvektorer e_k.

$$Ae_k = \lambda e_k$$

Egenvektorerna är parvis ortogonala. Vi kan normera dem så att $\|e_k\| = 1$.

Bildar ON-bas. Godtycklig vektor u i $\mathbb{R}^3$

$$u = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$$

$$(e_1|u) = x_1(e_1|e_1) + 0 + 0 = x_1 \cdot 1.$$

$$Au = x_1Ae_1 + x_2Ae_2 + x_3Ae_3 = x_1\lambda_1e_1 + x_2\lambda_2e_2 + x_3\lambda_3e_3 =$$

$$= \lambda_1(e_1|u)e_1 + \lambda_2(e_2|u)e_2 + \lambda_3(e_3|u)e_3 =$$

$$= \sum \lambda_k \frac{(e_k|u)}{\|e_k\|^2} e_k = \sum_{k=1}^{3} \lambda_k P_{[e_k]} u.$$

Skalärprodukt i $\mathbb{R}^3$ $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$

$$(u|v) = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = u^T v$$

A symmetrisk $A = A^T$

$$(u|Av) = u^T(Av) = u^TAv = u^TA^Tv = (Au)^Tv =$$
$$= (Au|v) \text{ för alla } u, v.$$

$A: D_A \to H$ operator, D_A tät i H.

A symmetrisk = självadjungerad om $(Au|v) = (u|Av)$ för alla $u, v \in D_A$.

då är $(Au|u) = (u|Au) = \overline{(Au|u)}$ dvs $(Au|u)$ reellt.

A positivt semidefinit om $(Au|u) \geq 0$ för alla $u \in D_A$

A positivt definit om $(Au|u) > 0$ för alla $u \in D_A$, $u \neq 0$.

λ egenvärde, u egenfunktion $Au = \lambda u$, $u \neq 0$

Sats. A symmetrisk $\Rightarrow$ alla egenvärden reella.
egenfunktioner motsvarande λ_1, λ_2, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ är ortogonala.
A pos. semidefinit/pos. definit $\Rightarrow$ alla egenvärden ≥ 0 / > 0.

Sats. (spektralsats). A symmetrisk på Hilbertrum H ...
Då existerar en ortogonal bas $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ av egenvektorer till A

$$Au = \sum_k \lambda_k P_{[e_k]} u$$

Ex $A = -\partial_x^2$ $D_A = \{u \in C^2([0,\pi]); u(0) = u(\pi) = 0\}$
tät i $L_2([0,\pi]) = H$

A symmetrisk? $(u|v) = \int_0^{\pi} \overline{u(x)} v(x)\,dx$

$$(u|Av) = \int \overline{u(x)}(-v''(x))\,dx = -\left[\overline{u(x)}v'(x)\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \overline{u'(x)}v'(x)\,dx \quad \{u, v \in D_A\}$$

$$\underbrace{\left(u(0)v'(0) - u(\pi)v'(\pi)\right)}_{=0} \quad = \left[\overline{u'(x)}v(x)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \overline{u''(x)}v(x)\,dx =$$

$$= \int_0^{\pi} \overline{(-d_x^2 u)}\, v\,dx = (Au|v) \quad \text{SVAR: JA!!!}$$

Men A positivt semidefinit?

$$(Au|u) = \text{(se tidigare)} = \int_0^{\pi} \overline{u'(x)}u'(x)\,dx = \int_0^{\pi} |u'(x)|^2\,dx \geq 0$$

Svar Ja. :)

Men A positivt definit?

$$0 = (Au|u) = \int_0^{\pi} |u'(x)|^2\,dx \Rightarrow |u'(x)| = 0 \Leftrightarrow u(x) = C.$$

men $u \in D_A$ $u(0) = 0 = C$.

Ja!

Sats $\Rightarrow$ alla $\lambda > 0$ $\lambda = \omega^2$

$Au = \lambda u$ $-u'' = \omega^2 u$

$$u = A\sin\omega x + B\cos\omega x$$

$u(0) = B = 0$, $B = 0$.
$u(\pi) = 0 = A\sin\omega\pi$ $A \neq 0$.
$\omega = k = 1, 2, 3, \ldots$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda = k^2 \\ \sin(kx) \end{cases}$$

Reguljära Sturm-Liouville

Kallas operatorer på formen

$$Au = \frac{1}{w(x)}\left(-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du(x)}{dx}\right) + q(x)u(x)\right) =$$
$$= \frac{1}{w}\left(-(pu')' + qu\right)$$

$p \in C^1(I)$, $q, w \in C^0(I)$, $p, q \geq 0$, $w > 0$

$I = [x_0, x_1]$

$$D_A = \left\{u \in C^2(I);\ \alpha_0 u(x_0) - \beta_0 u'(x_0) = 0,\ \alpha_1 u(x_1) + \beta_1 u'(x_1) = 0\right\}$$

$\alpha_k u(x_k) + \beta_k \frac{\partial u}{\partial n}(x_k) = 0$ n utåtriktad normal

$\alpha_0, \beta_0 \geq 0$ inte båda $= 0$.
$\alpha_1, \beta_1 \geq 0$ — " —

Ex $A = -\frac{d^2}{dx^2}$, $D_A = \{u \in C^2([0,\pi]); u(x_0) = u(x_1) = 0\}$
är Sturm-Liouville

$p = 1$, $q = 0$, $w = 1$, $\alpha_0 = 1$, $\beta_0 = 0$, $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = 0$

Sats A reguljär Sturm-Liouville är både symmetrisk och positivt semidefinit på Hilbertrum $L_2(w, I)$
(se vikt w): $(u|v) = \int_{x_0}^{x_1} \overline{u(x)}\,v(x)\,w(x)\,dx$

Sats Sturm-Liouville operator har reella egenvärden $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_k \ldots$
$\lambda_k \to \infty$
$k \to \infty$

Motsvarande egenfunktioner $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ utgör bas i $L_2(w, I)$.
För varje $u \in L_2(w, I)$ gäller

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k,\quad c_k = \frac{(e_k|u)}{\|e_k\|^2}$$

$u \in D_A$, $Au = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \lambda_k e_k$

Ex $A = -\frac{d^2}{dx^2}$, $D_A = \{u \in C^2([0,1]);$
$u(0) = 0 = u'(1)\}$

$I = [0,1]$ $p(x) = 1$, $q(x) = 0$, $w(x) = 1$,
$\alpha_0 = 1$, $\beta_1 = 0$, $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = 1$.

A reguljär Sturm-Liouville på
$L_2(1, [0,1])$
Bestäm egenvärden & egenfunktioner

$Au = \lambda u$ $\quad -u'' = \omega^2 u$.
$(\lambda = \omega^2)$
Om $\lambda = 0$ $\quad -u'' = 0$ $\quad u = Ax + B \} A = B = 0$
$u(0) = B = 0$, $u' = A$, $u'(1) = A = 0$ ingen egenfunktion

$\lambda > 0$ $\quad \lambda = \omega^2$ $\quad -u'' = \omega^2 u$ $\quad u'' + \omega^2 u = 0$
$r^2 + \omega^2 = 0$
$r = \pm i\omega$

$u = A\cos\omega x + B\sin\omega x$
$u(0) = A \cdot 1 + B \cdot 0 = A = 0$.
$u'(x) = B\omega\cos\omega x$.
$u'(1) = B\omega\cos\omega = 0 \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{2} + k\pi = \pi(k+\frac{1}{2})$
$\omega > 0$. $B \neq 0$. $\quad k = 1, 2, 3, \ldots$

$\lambda = \pi^2(k+\frac{1}{2})^2$
$e_k = \sin\pi((k+\frac{1}{2})x)$

Åter $\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2 u = 0 \\ u(0,t) = 0,\ u_x'(1,t) = 1 \\ u(x,0) = 1 \end{cases}$
Sök $u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\sin(\pi(k+\frac{1}{2})x)$

$u_t' - u_{xx}'' = \sum (u_k' - \pi^2(k+\frac{1}{2})^2 u_k) e_k$
$u_k(t) = c_k e^{-\pi^2(k+\frac{1}{2})^2 t}$.
$c_k = \frac{(e_k | u_0)}{(e_k | e_k)}$